인장력하에서 길이방향으로 이동하는 비선형 탄성현의 경계제어

박선규* · 이숙재* · 홍금식†

(2002 년 5 월 29 일 접수, 2003 년 12 월 5 일 심사완료)

Boundary Control of an Axially Moving Nonlinear Tensioned Elastic String

Sun-Kyu Park, Suk-Jae Lee and Keum-Shik Hong

Key Words : Exponential Stability(지수 안정화), Axially Moving String(축방향 이동 현), Boundary Cotrol(경계 제어), Hyperbolic Partial Differential Equation(쌍곡선 편미분 방정식), Lyapunov Method(리아프노프 방법), Nonlinear String(비선형 현)

Abstract

In this paper, an active vibration control of a tensioned elastic axially moving string is investigated. The dynamics of the translating string are described by a non-linear partial differential equation coupled with an ordinary differential equation. The time varying control in the form of the right boundary transverse motions is suggested to stabilize the transverse vibration of the translating continuum. A control law based on Lyapunov's second method is derived. Exponential stability of the translating string under boundary control is verified. The effectiveness of the proposed controller is shown through the simulations.

1. 서 론

많은 기계기구에서 이동하는 요소를 동력, 재료, 및 정보의 전달수단 혹은 교통수단으로 사용하고 있다. 이와 같이 고정된 양단을 지지점으로 하여 이 양단 사이를 연속체적으로 물질이 이동하는 시스템을 길이방향(축방향) 이동시스템(axially moving system)이라 한다. 길이방향 이동 시스템을 응용한 기계의 예로서, 자기기록 테이프, VCR, 대용량 저장장치 등의 기록 저장장치와, 벨트 또는 체인 등의 동력전달장치, 케이블카, 스키 리프트 등의 교통 및 수송장치, 와이어 방전가공기, 회전띠톱기계 등의 산업기계가 있다. 이러한 다양한 응용성에도 불구하고, 운동 중에 발생하는 진동과 소음이 실제 적용에 제한요소가 되고 있으며, 고정밀도, 경량화, 고속주행이 요구될 때 더욱 그러하다. 또한, 생산성과 제품의 품질향상을 위해서는 고속주행과 고정밀도가 필수적으로 요구되므로, 이동하는 요소들의 진동을 저감시키기 위한 능동제어방법이 보다 확대되고 있다.

위와 같은 길이방향으로 이동하는 현(string) 및 연속체(continua)에 대한 동역학과 진동해석에 관한 연구는 광범위하게 이루어져왔지만, 능동제어에 대한 연구는 문헌상에서 많이 발견되지 않고 있다. 본 논문에서는 길이방향으로 이동하는 비선형 현의 탄성을 고려한 모델링과 우측 경계에서의 힘제어를 통하여 시스템 전체의 진동을 지수적으로 줄이는 능동경계제어기(active boundary controller)의 설계에 관하여 고찰하고자 한다.

분포매개변수시스템(distributed parameter system)으로 기술되는 길이방향으로 이동하는 시스템의 동특성 해석과 안정성 연구, 능동 및 수동적인 제어방법의 개발에 관한 연구는 세계적으로 활발히 진행되어 왔다. Wickert 와 Mote[1]는 감쇠와 강성을 수동적으로 변화시키는 방법을 이용하여 계를 안정화하는 수동제어에 관한 연구를 하였고,

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부
E-mail : kshong@pusan.ac.kr
TEL : (051)510-2454 FAX : (051)514-0685
* 부산대학교 지능기계공학과

Yang 과 Mote[2]는 주파수 영역에서 전달함수를 사용한 연속체의 진동제어방법을 개발하였는데, 이 방법을 통해서 point 센서와 point 액츄에이터가 동일위치(collocation)이거나 비동일위치(noncollocation)일 때 모두에 대해 스필오버(spillover)불안정성을 극복할 수 있음을 밝혔다. Lee 와 Mote[3]는 길이방향 이동현계의 경계제어법으로 시변경계에 의한 힘제어방법을 제안하였으며, 현의 진동 에너지를 소산시키는 최적의 제어 법칙을 유도하였다. Lee 와 Mote[4]는 길이방향으로 이동하는 인장된 오일러-베르누이보(Euler-Bernoulli beam)의 횡진동(transverse vibration)을 경계에서의 능동 및 수동 감쇠기로 제어하였으며, Ying 과 Tan[5]은 길이방향으로 이 동하는 현의 경계근처에서 진동을 소멸시키는 파동상쇄(wave cancellation) 개념을 기초로 하는 피드백 제어기를 사용한 능동진동제어를 제안하였다. Li 와 Rahn[6] 및 Li 외 2 인[7]은 길이방향으로 이동하는 현과 보를 작동기를 중심으로 제어되는 부분과 그렇지 않은 부분으로 나누고 제어되는 부분에 국한된 진동제어를 연구하였다. Fard 와 Sagatan[8]는 경계제어를 사용함으로써 진동하는 보를 지수적으로 안정화(exponential stabilization)시킬 수 있음을 보였다. 국내에서도 연구가 진행되고 있는데, 류두현과 박영필[13]은 길이방향으로 이동하는 현의 횡방향 진동을 안정화하기 위하여 속도경계제어를 적용하였고, 이승엽과 박상규[15]는 현의 길이에 따른 진동특성 및 동적 안정성을 연구하였다.

본 논문은 아연도강판의 제작공정중 연속용융식 아연도금공정에서 발생하는 강철 스트립의 진동제어에 관한 연구이다. Fig. 1 은 용융아연도금공정을 나타낸다. 용융식 아연도강판은 성형성, 용접성, 도장성, 내식성 등이 품질의 중요한 특성이다. 그 중 내식성이 아연도강판의 기본적이고도 가장 중요한 특성이다. 내식성은 도금이 얼마나 균일하게 되어있는가, 두께는 적절한가 등이 중요하다. 이런 문제들은 도금공정 중 도금판의 진동으로 인한 불균일한 도금을 줄임으로 해결할 수 있다. 따라서 진동을 얼마나 효과적으로 줄이느냐에 대한 연구가 본 논문의 요지이다.

길이방향으로 이동하는 시스템은 제어대상물과 시스템의 특징에 따라 현, 벨트, 보로 모델링할 수가 있다. 본 논문에서는 강철스트립의 두 지점 사이의 거리에 비해 두께는 얇고, 너비가 작기 때문에, 이 강철스트립을 현으로 가정하고 전개하도록 한다. 시스템에 유입 혹은, 유출되는 질량이 있고, 제어력이 가해지는 곳인 시변경계(time varying boundary)에서 이동하는 질량에 의해 일이

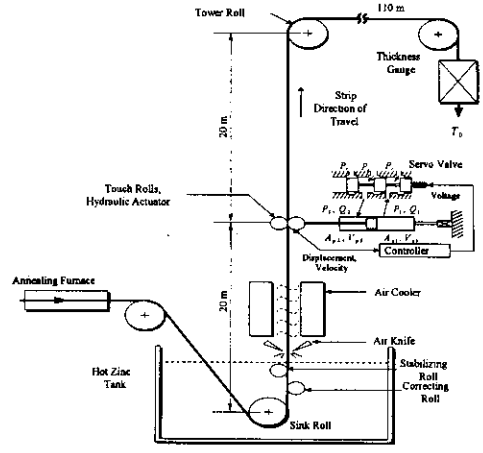

Fig. 1 A translating steel strip in the zinc galvanizing line

발생하기 때문에 운동방정식은 질량변화가 있는 시스템에 대한 해밀턴 원리(Hamilton's principle for system of changing mass)[9]를 사용하여 유도하도록 한다. 본 논문에서 유도된 운동방정식은 비선형 편미분방정식이다. 또한 Fig. 2 의 횡방향으로 이 동 하는 현의 우측경계에서의 힘제어는 이동하는 현의연속체와 경계사이에 발생하는 에너지 플럭스(energy flux)의 개념을 바탕으로, 이동현의 진동에너지를 감소시켜 횡방향 진동을 제어하는 방법으로 시변경계에 의한 힘제어 방법과 작동기의 감쇠를 동시에 설계하도록 한다. 즉, 하나의 센서와 설계된 감쇠기를 이용하여 현의 횡진동을 지수적으로 감소시킬 수 있다. 이동하는 현 시스템에 대한 지금까지의 연구는 현의 탄성을 고려 하지 않은 선형방정식에 국한되었고 2 개 이상의 센서가 사용되었다. 일정한 장력과 현의 탄성을 고려하기 위해 본 논문에서는 비선형 현방정식에 대한 경계제어법칙을 유도하였으며 유도된 제어법칙을 적용하기 위해서는 하나의 센서만이 필요하며 부가적으로 작동기의 감쇠값을 설계하도록 되어 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2 절에서는 질량변화가 있는 시스템에 대한 해밀턴 원리를 사용하여 이동하는 비선형 현시스템의 운동방정식을 유도하고, 3 절에서는 이 시스템의 횡진동을 안정화 시킬 수 있는 제어 법칙을 유도 한다. 4 절에서는 이 제어 법칙이 적용된 시스템은 현의 횡방향 변위를 지수적으로 0 으로 감소시킬 수 있다는 것을 보인다. 5 절에서는 유도된 제어 법칙을 적용하는 방법에 대해 소개하고, 6 절에서 시뮬

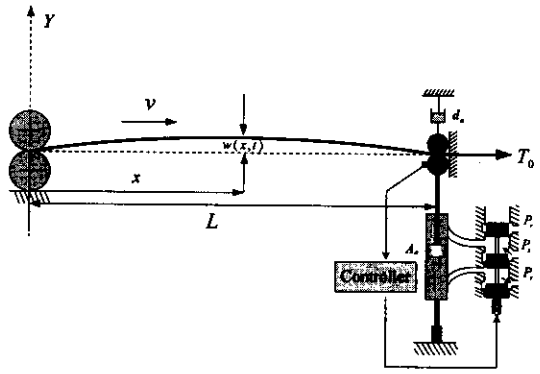

Fig. 2 An axially moving strip under the right boundary control force

레이션을 통하여 경계제어법칙의 타당성과 성능의 유효성을 살펴본다. 마지막으로 7 절에서는 얻어진 연구결과를 토대로 경계제어에 관한 결론을 맺는다.

2. 길이방향으로 이동하는 비선형 현의 모델링

일정한 간격(L)의 두 지지점을 지나는 현의 운동방정식을 유도하고자 한다. 재질의 밀도가 ρ 이고, 횡단면의 면적 A 가 균일한 현이, 초기 장력 P_0 가 결린 상태로 v 의 속도로 일정하게 이동하는 경우를 고려한다. 이 때, 현의 횡방향 변위를 두 지지점 사이의 공간좌표 x 와 시간 t 에 대한 함수 $w(x,t)$ 로 표현할 수 있으며, 그 개략도를 Fig. 2 에 나타내었다. 스트립을 지지 하는 양끝단은 고정되어 있으나, 경계제어법칙을 사용하기 위해 좌측경계는 고정되어 있고, 좌측 경계와 작동기 사이의 진동을 줄이는 것이 목적으로 작동기의 위치($x = L$)를 우측경계로 고려하며, 이 때 우측 경계는 시변경계(time varying boundary)로 취급된다.

Fig. 2 에서 임의의 x 지점에서의 횡방향 속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}(x,t) = vi + \left\{\frac{dw(x,t)}{dt}\right\} j = vi + \left(w_t + v \cdot w_x\right) j . \quad (1)$$

여기서 $(\cdot)_x$ 와 $(\cdot)_t$ 는 각각 $\partial(\cdot)/\partial x$ 와 $\partial(\cdot)/\partial t$ 를 나타내며 앞으로 이 표시법을 사용하도록 한다.

이동현과 작동기에 대한 운동에너지(kinetic energy)와 위치에너지(potential energy)는 다음과 같이 각각 쓸 수 있다.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\left\{v^2 + \left(w_t + v w_x\right)^2\right\} dx + \frac{1}{2} m w_t^2(L,t), \quad (2a)$$

$$U = \int_0^L \left(P_o \varepsilon_x + \frac{EA}{2}\varepsilon_x^{\,2}\right) dx . \quad (2b)$$

여기서 T 는 운동에너지, U 는 위치에너지를 나타내며, m 은 작동기의 질량, E 는 현의 탄성계수, ε_x 는 x 방향의 변형률(strain)을 나타낸다. 길이가 dx 인 현의 미소요소가 장력 P_0 의 영향으로 길이가 ds 로 변화한 경우, 테일러 급수를 이용하여 근사화하면 ε_x 를 식 (3)과 같이 구할 수 있다.

$$\varepsilon_x \cong \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right\}^2 . \quad (3)$$

따라서 위치에너지 식 (2b)는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left(P_0 + \frac{EA}{8} w_x^2\right) w_x^2 dx . \quad (4)$$

길이방향으로 이동하는 구조물에 대한 운동방정식은 경계에서의 질량 변화가 있는 시스템에 대한 해밀턴 원리로 구할 수 있으며 그 식은 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T - \delta U + \delta W_{n.c} + \delta W_{r.b}\right) dt = 0 . \quad (5)$$

여기서 $W_{n.c}$ 는 비보존력에 의한 일(noncomser -vative work), $W_{r.b}$ 는 좌우 경계를 통과하는 가상 운동량 수송(virtual momentum transport)을 나타낸다. 이동현에 작용하는 외력인 비보존력에 의한 가상일과 가상 운동량 수송의 변분은 식 (5)와 같다.

$$\delta W_{n.c} = F_c(t)\delta w(L,t) - d_a w_t(L,t)\delta w(L,t) , \quad (6a)$$

$$\delta W_{r.b} = -\rho A v\left\{w_t(L,t) + v w_x(L,t)\right\}\delta w(L,t) . \quad (6b)$$

여기서 $F_c(t)$ 는 작동기의 제어력을 나타내며, d_a 는 작동기의 감쇠계수(damping coefficient)를 나타낸다.

식 (5)에 대입하기 위해 식 (2a)와 식 (2b)도 각각 변분을 취하도록 한다.

$$\delta T = \rho A\int_0^L \left(w_t + v w_x\right)\left(\delta w_t + v\delta w_x\right) dx + m w_t(L,t)\delta w_t(L,t) , \quad (7a)$$

$$\delta U = P_0\int_0^L w_x \delta w_x dx + \frac{EA}{2}\int_0^L w_x^3 \delta w_x dx . \quad (7b)$$

식 (6)와 식 (7)을 식 (5)에 대입하여 전개하면

다음 과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta U+\delta W_{n.c}+\delta W_{r.b})dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(w_t+vw_x)\delta w_t\,dx\,dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left(\rho Avw_t+\rho Av^2w_x\right)\delta w_x\,dx\,dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left(-P_0w_x-\frac{EA}{2}w_x^3\right)\delta w_x\,dx\,dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[mw_t(L,t)\delta w_t(L,t)\delta w(L,t)\right]dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\{F_c(t)-d_aw_t(L,t)\}\delta w(L,t)\right]dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\rho Av\{w_t(L,t)+vw_x(L,t)\}\delta w(L,t)dt=0\ .(8)$$

또한, 식 (8)에 대해 부분적분을 취하여 정리하면 다음과 같다.

$$\left[\int_0^L(\rho Aw_t+\rho Avw_x)\delta w dx\right]_{t_1}^{t_2}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L(\rho Aw_{tt}+\rho Avw_{xt})\delta w\,dx\,dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\rho Avw_t+\rho Av^2w_x\right)\delta w\right]_0^L dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(-P_0w_x-\frac{EA}{2}w_x^3\right)\delta w\right]_0^L dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left(\rho Avw_{tx}+\rho Av^2w_{xx}\right)\delta w dx dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left(-P_0w_{xx}-\frac{3EA}{2}w_x^2w_{xx}\right)\delta w dx dt$$
$$+\left[mw_t(L,t)\delta w(L,t)\right]_{t_1}^{t_2}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\{mw_{tt}(L,t)-F_c(t)+d_aw_t(L,t)\}\delta w(L,t)dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\rho Avw_t(L,t)+\rho Av^2w_x(L,t)\right\}\delta w(L,t)dt=0. \quad (9)$$

식 (9)은 시스템의 경계조건인 $w(0,t)=w_t(0,t)=0$ 에 의해서 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\{\rho Aw_{tt}+2\rho Avw_{tx}\}\delta w dx dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left\{\left(P_0-\rho Av^2+\frac{3EA}{2}w_x^2\right)w_{xx}\right\}\delta w dx dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\{mw_{tt}(L,t)-F_c(t)+d_aw_t(L,t)\}\delta w(L,t)dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\{P_0+\frac{EA}{2}w_x^2(L,t)\right\}w_x(L,t)\delta w(L,t)dt=0. \quad (10)$$

이제, 식 (10)를 만족하는 길이방향 이동현의 횡진동에 관한 지배방정식 (governing equation)은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\rho Aw_{tt}+2\rho Avw_{xt}$$
$$-\left(P_0-\rho Av^2+\frac{3EA}{2}w_x^2\right)w_{xx}=0\ , \quad (11a)$$

$w(0,t)=0$, $w_x(0,t)=0$, 그리고

$$F_c(t)=mw_{tt}(L,t)+d_aw_t(L,t)$$
$$+\left\{P_0+\frac{EA}{2}w_x^2(L,t)\right\}w_x(L,t). \quad (11b)$$

여기서 w_{tt} 는 현을 구성하는 요소의 횡방향으로의 국부가속도(local acceleration) 이고, w_{xt} 는 코리올리가속도(Coriolis acceleration)이며, v^2w_{xx} 는 구심가속도(centripetal acceleration)이다.

길이방향으로 이동하는 현의 고유진동수는 주행속도가 증가함에 따라 감소하며, 현의 파동속도와 일치하게 될 때 시스템이 기계적 공진을 일으키며 발산하게 된다. 이 때의 속도를 임계속도(critical speed)라 하며, 임계속도는 현이 안정하게 이동할 수 있는 한계속도를 의미한다. 따라서 현의 이동속도는 임계속도 이내의 값을 가져야 한다. 즉,

$$0<v<v_{cr}=\sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \quad (12)$$

의 관계를 만족하여야 한다.

따라서 본 논문에서는 현의 모델에서 이동속 도를 임계속도 이내, 즉, $v<\sqrt{P_0/\rho}$ 로 가정한다. 또한 Table 1을 이용하면 $v_{cr}=\sqrt{P_0/\rho}=$ 35.33 m/s 를 얻을 수 있다.

3. 비선형 현의 경계제어법칙의 유도

본 연구의 목적은 길이방향으로 이동하는 비선형 현의 횡방향 진동을 억제할 수 있는 능동제어기를 설계하는데 있다. 진동을 억제하는 방법으로는 시스템의 영역내에서 제어력을 작용시키는 방법과 시스템의 경계를 변화시켜 시스템 전체의 에너지를 흡수, 소멸하도록 하는 방법을 고려할 수 있다. 시스템의 영역내에서 제어력을 작용시키는 방법는 이론적 가능성은 확보할 수 있으나, 제어기의 설치 및 적용이 대상계 자체의 동특성을 크게 변화시킬 수 있고 현실적인 면에서 다루기 어렵다. 시스템의 경계를 변화시켜 시스템

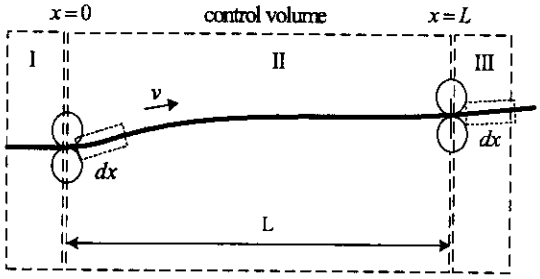

Fig. 3 Control volume of an axially moving string system with time varying right boundary.

전체의 에너지를 흡수, 소멸하도록 하는 방법은 경계내의 진동을 경계를 변화시킴으로 전체의 진동에너지를 줄이는 개념으로 본 논문에서는 시변경계를 이용하여 현의 진동을 제어하는 방법을 사용한다. 따라서, $x=L$ 에서 시변경계 조건을 사용하여 전체 진동을 지수적으로 안정화시키는 제어법칙을 유도하고자 한다.

이동하는 현의 횡진동을 제어하기 위한 시변 우측경계의 제어법칙을 구하기 위하여 전체 기계적 에너지를 리아프노프 함수후보(Lyapunov functional candidate)로 선정하고 이 함수의 시간에 대한 전미분이 음이 되게 하는 제어법칙을 유도한다.[11] 작동기를 제외한 이 시스템의 기계적 에너지(mechanical energy)는 다음과 같다.

$$V_S(t)=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(w_t+vw_x)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L\left(P_0+\frac{EA}{8}w_x^2\right)w_x^2 dx. \tag{13}$$

정리 1: 다음의 $\tilde{V}(t)$는 기계적 에너지 $V_S(t)$와 등가(equivalent)이다.

$$\tilde{V}(t)=V_S(t)+V_B(t). \tag{14}$$

여기서

$$V_B(t)=\beta\rho A\int_0^L xw_x(w_t+vw_x)dx \tag{15}$$

이고, β는 임의의 양수이다.

즉, 다음의 식이 성립한다.

$$(1-C_1)V_S(t)\le\tilde{V}(t)\le(1+C_1)V_S(t). \tag{16}$$

여기서 $C_1>0$이다.

증명: 식 (14)의 마지막 항은 다음의 부등식을 만족한다.

$$V_B(t)=\rho A\beta\int_0^L xw_x(w_t+vw_x)dx$$

$$\le\frac{\rho A\beta L}{2}\left\{\int_0^L w_x^2dx+\int_0^L(w_t+vw_x)^2dx\right\}$$

$$\le\rho A\beta L\left\{\frac{1}{P_0}\cdot\frac{P_0}{2}\int_0^L w_x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L(w_t+vw_x)^2dx\right\} + \rho A\beta L\left\{\frac{1}{EA}\cdot\frac{EA}{8}\int_0^L w_x^4dx\right\}$$

$$\le\frac{\rho A\beta L}{\min(P_0,\rho A,EA)}V_S(t). \tag{17}$$

여기서

$$C_1=\frac{\rho A\beta L}{\min(P_0,\rho A,EA)} \tag{18}$$

이다. 식 (17)을 식 (14)에 대입하면,

$$\tilde{V}(t)\le V_S(t)+C_1V_S(t)=(1+C_1)V_S(t) \tag{19}$$

이 얻어진다. 같은 방법으로 하면 식 (16)의 좌측 부등호도 증명되고 또한 $V_S(t)$와 $\tilde{V}(t)$가 동가이기 위해서는 $1-C_1>0$이어야 하므로 식 (18)으로부터 다음의 부등식을 얻는다.

$$0<\beta<\frac{\min(P_0,\rho A,EA)}{\rho AL}. \tag{20}$$

따라서 정리 1이 증명된다. ■

정리 1을 이용하여 리아프노프 함수후보를 다음과 같이 정의한다.

$$V_{total}(t)=\tilde{V}(t)+V_A(t). \tag{21}$$

여기서

$$V_A(t)=\frac{m}{2}\{w_t(L,t)+(v+\beta L)w_x(L,t)\}^2 \tag{22}$$

이다.

연속체인 이동하는 현의 경우, 경계 사이의 현을 구성하는 요소들의 집합체는 시간에 따라 변화한다. 따라서, 리아프노프 함수의 시간에 대한 변화율 혹은, 에너지의 시간에 대한 변화율을 구하는데 있어서, 개개의 질량에 대해서가 아니라 특정영역 내부의 연속체에 대해서 에너지의 시간변화율로 표현할 수 있다. 즉, 어떠한 순간에 어떤 검사체적(control volume)을 점유하는 어떠한 시스템의 물성치의 변화율(여기서는 기계적 에너지를 의미한다)은 검사체적 내에서의 그것의 순간 누적률과, 검사체적의 경계를 통한 순간 유출률과 유입률의 차이를 합한 것이다. 여기서, 후자는 검사표면을 통한 총 유출률이다. 이것을 고정된 검사체적에 대한 Reynolds의 1차원 수송정리(one-dimensional Reynolds transport theorem)라고 한다.[12]

리아프노프 함수의 시간변화율을 구하기 위해 Fig. 3에 나타낸 바와 같이 고정된 검사체적을 설정하여 사용하기로 한다. 체적 II는 임의의 시간 t에 검사체적 내부를 차지하는 현이고,

시간이 $t+dt$ 로 변하는 동안에 검사 체적에서의 유출량을 III으로 표시하고, 유입량을 I로 표시한다. 따라서 검사체적 내에서의 등가 기계적 에너지의 변화율을 구하기 위해 수송 정리를 이용하면 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dt}V(t) = V_t + vV_x\Big|_0^L . \tag{23}$$

우변의 첫째 항은 검사체적 내에서의 에너지의 시간변화율을 의미하며, 둘째 항은 검사면을 통과하는 좌/우측경계에서의 에너지 유출/입을 의미한다.

앞서 언급한 리아프노프 방법을 이용하여 제어법칙을 구하기 위해, 식 (21)의 함수들의 시간에 대한 변화율을 구하도록 한다. 먼저 V_S 의 변화율을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_{St}(t) &= \int_0^L \rho A(w_t + vw_x)(w_{tt} + vw_{xt})dx \\ &\quad + \int_0^L \left(P_0 + \frac{EA}{2}w_x^2\right)w_x w_{xt}dx \\ &= \int_0^L \rho A(w_t + vw_x)\left\{(P_0 - \rho Av^2)w_{xx}\right\}dx \\ &\quad - \int_0^L \rho Avw_{xt}(w_t + vw_x)dx + \int_0^L P_0 w_x w_{xt}dx \\ &\quad + \int_0^L \frac{3EA}{2}w_x^2(w_t + vw_x)dx \\ &\quad + \int_0^L \frac{EA}{2}w_x^3 w_{xt}dx \\ &= \left(P_0 - \rho Av^2\right)\left[w_t w_x\right]_0^L + \frac{v\left(P_0 - \rho Av^2\right)}{2}\left[w_x^2\right]_0^L \\ &\quad + \frac{EA}{2}\left[w_x^3 w_t\right]_0^L - \frac{\rho Av}{2}\left[w_t^2\right]_0^L + \frac{3EAv}{8}\left[w_x^4\right], \end{aligned} \tag{24a}$$

$$\begin{aligned} vV_{Sx}(t)\Big|_0^L &= v\int_0^L \rho A(w_t + vw_x)(w_{tx} + vw_{xx})dx \\ &\quad + v\int_0^L P_0 w_x w_{xx}dx + \frac{EAv}{2}\int_0^L P_0 w_x^3 w_{xx}dx \\ &= \frac{\rho Av}{2}\left[(w_t + vw_x)^2\right]_0^L + \frac{vP_0}{2}\left[w_x^2\right]_0^L \\ &\quad + \frac{EAv}{8}\left[w_x^4\right]_0^L . \end{aligned} \tag{24b}$$

식 (24)에 의해 $\frac{d}{dt}V_S(t)$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_S(t) &= \left(P_0 - \rho Av^2\right)\left[w_t w_x\right]_0^L + \frac{v\left(P_0 - \rho Av^2\right)}{2}\left[w_x^2\right]_0^L \\ &\quad + \frac{EA}{2}\left[w_x^3 w_t\right]_0^L - \frac{\rho Av}{2}\left[w_t^2\right]_0^L + \frac{3EAv}{8}\left[w_x^4\right]_0^L \\ &\quad + \frac{\rho Av}{2}\left[(w_t + vw_x)^2\right]_0^L + \frac{vP_0}{2}\left[w_x^2\right]_0^L \\ &\quad + \frac{EAv}{8}\left[w_x^4\right]_0^L \\ &= P_0 w_x(L,t)w_t(L,t) + vP_0 w_x^2(L,t) \\ &\quad + \frac{EA}{2}w_x^3(L,t)w_t(L,t) + \frac{EAv}{2}w_x^4(L,t) . \end{aligned} \tag{25}$$

$V_B(t)$ 의 변화율을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} V_{Bt}(t) &= \rho A\beta\int_0^L xw_{xt}(w_t + vw_x)dx \\ &\quad + \rho A\beta\int_0^L xw_x(w_{tt} + vw_{xt})dx , \end{aligned} \tag{26a}$$

$$\begin{aligned} vV_{Bx}(t) &= v\rho A\beta\int_0^L w_x(w_t + vw_x)dx \\ &\quad + v\rho A\beta\int_0^L xw_{xx}(w_t + vw_x)dx \\ &\quad + v\rho A\beta\int_0^L xw_x(w_{tx} + vw_{xx})dx . \end{aligned} \tag{26b}$$

식 (26)에 의해 $\frac{d}{dt}V_B(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_B(t) &= v\rho A\beta\int_0^L (xw_{xt}w_x + xw_t w_{xx} + w_x w_t)dx \\ &\quad + \rho Av^2\beta\int_0^L xw_x w_{xx}dx + \rho A\beta\int_0^L xw_{xt}w_t dx \\ &\quad + \beta\int_0^L xw_x(\rho Aw_{tt} + 2\rho Avw_{xt} + \rho Av^2 w_{xx})dx \\ &\quad + \rho Av^2\beta\int_0^L w_x^2 dx . \end{aligned} \tag{27}$$

여기서 각각 다음의 부분적분 식을 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_0^L (xw_{xt}w_x + xw_t w_{xx} + w_x w_t)dx \\ &\quad = \left[xw_x w_t\right]_0^L = Lw_x(L,t)w_t(L,t), \end{aligned} \tag{28a}$$

$$\int_0^L xw_x w_{xx}dx = \frac{L}{2}w_x^2(L,t) - \frac{1}{2}\int_0^L w_x^2 dx, \tag{28b}$$

$$\int_0^L xw_{xt}w_t dx = \frac{L}{2}w_t^2(L,t) - \frac{1}{2}\int_0^L w_t^2 dx. \tag{28c}$$

또한, 운동방정식인 식 (11a)를 이용하면 다음의 등식도 성립한다.

$$\begin{aligned} &\beta\int_0^L xw_x(\rho Aw_{tt} + 2\rho Avw_{xt} + \rho Av^2 w_{xx})dx \\ &\quad = \beta\int_0^L xw_x\left\{\left(P_0 + \frac{3EA}{2}w_x^2\right)w_{xx}\right\}dx . \end{aligned} \tag{29}$$

따라서 식 (28)과 식 (29)로부터 식 (27)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt}V_B(t) = \beta\rho ALvw_x(L,t)w_t(L,t)$$

$$+\frac{\rho Av^2\beta L}{2}w_x^2(L,t)-\frac{\rho Av^2\beta}{2}\int_0^L w_x^2dx$$
$$+\frac{\beta LP_0}{2}w_x^2(L,t)-\frac{\beta P_0}{2}\int_0^L w_x^2dx$$
$$+\frac{3\beta EAL}{8}w_x^4(L,t)-\frac{3\beta EA}{8}\int_0^L w_x^4dx$$
$$+\frac{\rho A\beta L}{2}w_t^2(L,t)-\frac{\rho A\beta}{2}\int_0^L w_t^2dx$$
$$+\rho Av^2\beta\int_0^L w_x^2dx. \quad (30)$$

식 (22)의 시간에 대한 변화율은

$$\frac{d}{dt}V_A(t)=m\{w_t(L,t)+(v+\beta L)w_x(L,t)\}$$
$$\times\{w_{tt}(L,t)+(v+\beta L)w_{xt}(L,t)\} \quad (31)$$

이다.

우측경계 제어입력 $F_c(t)$와 작동기의 감쇠계수 d_a를 다음과 같이 정의한다.

$$F_c(t)=-Kw_{xt}(L,t),$$
$$d_a=\frac{v\rho A\beta L}{v+\beta L}=\frac{\rho A\beta L}{1+\beta L/v}. \quad (32)$$

여기서 $K=m(v+\beta L)$ 이고, 제어이득을 나타낸다. 따라서 식 (11a)와 식 (32)에 의해 식 (31)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}V_A(t)=\{w_t(L,t)+(v+\beta L)w_x(L,t)\}$$
$$\times\left\{-d_aw_t(L,t)-P_0w_x(L,t)-\frac{EA}{2}w_x^3(L,t)\right\}. \quad (33)$$

식 (25), 식 (30)와 식 (31)에 의해서 전체 기계적 에너지 식 (21)의 시간에 대한 변화율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dt}V_{total}(t)$$
$$=-\frac{\beta L}{2}\left(P_0-\rho Av^2\right)w_x^2(L,t)-\frac{\beta EAL}{8}w_x^4(L,t)$$
$$-\frac{\beta}{2}\left(P_0-\rho Av^2\right)\int_0^L w_x^2dx-\frac{\beta\rho A}{2}\int_0^L w_t^2dx$$
$$-\frac{3\beta EA}{8}\int_0^L w_x^4dx-\left(d_a-\frac{\beta\rho AL}{2}\right)w_t^2(L,t)$$
$$+\{\beta\rho ALv-d_a(v+\beta L)\}w_x(L,t)w_t(L,t). \quad (34)$$

식 (12)를 만족하는 v 는 $P_0>\rho Av^2$ 을 만족하므로 식 (34)의 마지막 두 항을 제외하고는 모두 음이다. 따라서 다음 두 식을 만족하면 식 (34)의 모든 항은 항상 음이 된다.

$$d_a-\frac{\beta\rho AL}{2}>0\Leftrightarrow d_a>\frac{\beta\rho AL}{2}=23.55, \quad (35)$$

$$\beta\rho ALv-d_a(v+\beta L)=0$$
$$\Leftrightarrow d_a=\frac{\beta\rho ALv}{v+\beta L}=\frac{\beta\rho ALv}{1+\beta L/v}=33.643. \quad (36)$$

여기서 식 (35)와 식 (36)를 모두 만족하기 위해서는

$$0<\beta\frac{L}{v}<1 \quad (37)$$

을 만족해야 하고, β는 또한 식 (20)를 만족해야 하므로

$$0<\beta<\min\left\{\frac{v}{L},\frac{P_0}{\rho AL},\frac{1}{L}\right\}=0.05 \quad (38)$$

이다.

3. 안정성 해석

이 절에서는 제어입력 $F_c(t)$와 작동기의 감쇠계수 d_a가 적용된 길이방향으로 이동하는 비선형 현시스템 식 (11a)는 지수적으로 안정함(exponential stability)을 보이고자 한다. 리아프노프 함수후보 의 시간에 대한 변화율 식 (34)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt}V_{total}(t)$$
$$=-\frac{\beta L}{2}\left(P_0-\rho Av^2\right)w_x^2(L,t)-\frac{\beta EAL}{8}w_x^4(L,t)$$
$$-\frac{\beta}{2}\left(P_0-\rho Av^2\right)\int_0^L w_x^2dx-\frac{\beta\rho A}{2}\int_0^L w_t^2dx$$
$$-\frac{3\beta EA}{8}\int_0^L w_x^4dx-\beta\rho AL\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)w_t^2(L,t). \quad (39)$$

여기서 $\frac{v}{(v+\beta L)}>\frac{1}{2}$ 이다. 그리고 식 (39)은 다음과 같이 전개된다.

$$\frac{d}{dt}V_{total}(t)$$
$$=-\frac{\beta L}{2}\left(P_0-\rho Av^2\right)w_x^2(L,t)-\frac{\beta EAL}{8}w_x^4(L,t)$$
$$-\frac{\beta\rho A}{2}\int_0^L w_t^2dx-\frac{\beta}{4}\left(P_0-\rho Av^2\right)\int_0^L w_x^2dx$$
$$-\frac{\beta}{4v^2}\left(P_0-\rho Av^2\right)\int_0^L(vw_x^2)dx-\frac{3\beta EA}{8}\int_0^L w_x^4dx$$
$$-\beta\rho AL\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)w_t^2(L,t)$$
$$\le-\frac{\beta L}{2}\left(P_0-\rho Av^2\right)w_x^2(L,t)-\frac{\beta EAL}{8}w_x^4(L,t)$$

$$-\min\left[\frac{\beta\rho A}{2},\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{4v^2}\right]\left[\int_0^L w_x^2dx+\int_0^L(vw_x^2)dx\right]$$
$$-\frac{3\beta EA}{8}\int_0^L w_x^4dx-\beta\rho AL\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)w_t^2(L,t)$$
$$-\frac{\beta(P_0-\rho Av^2)}{4}\int_0^L w_x^2dx. \quad (40)$$

여기서 부등식

$$-\int_0^L w_x^2dx-\int_0^L(vw_x^2)dx\le-\frac{1}{2}\int_0^L(w_t+vw_x)^2dx$$

을 이용하면 식 (40)는 다음과 같이 전개된다.

$$\frac{d}{dt}V_{total}(t)$$
$$\le-\frac{\beta L}{2}\left(P_0-\rho Av^2\right)w_x^2(L,t)-\frac{\beta EAL}{8}w_x^4(L,t)$$
$$-\min\left[\frac{\beta\rho A}{4},\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{8v^2}\right]\left[\int_0^L(w_t+vw_x)^2dx\right]$$
$$-\frac{3\beta EA}{8}\int_0^L w_x^4dx-\beta\rho AL\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)w_t^2(L,t)$$
$$-\frac{\beta(P_0-\rho Av^2)}{4}\int_0^L w_x^2dx$$
$$\le-\min\left[3\beta,\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2P_0},\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{4\rho Av^2}\right]$$
$$\times\left[\frac{P_0}{2}\int_0^L w_x^2dx+\frac{EA}{8}\int_0^L w_x^4dx+\frac{\rho A}{2}\int_0^L(w_t+vw_x)^2dx\right]$$
$$-\min\left[\frac{\beta L\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2m(v+\beta L)^2},\frac{\beta\rho AL}{m}\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$\times\left[\frac{m}{2}\left\{w_t(L,t)+(v+\beta L)w_x(L,t)\right\}^2\right]. \quad (41)$$

여기서 식 (13), 식 (21), 식 (22)을 이용하면 식 (41)은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt}V_{total}(t)$$
$$\le-\min\left[3\beta,\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2P_0},\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{4\rho Av^2}\right]\widetilde{V}(t)$$
$$-\min\left[\frac{\beta L\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2m(v+\beta L)^2},\frac{\beta\rho AL}{m}\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)\right]V_A(t)$$
$$\le-\min\left[3\beta,\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2P_0},\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{4\rho Av^2},\right.$$
$$\left.\frac{\beta L\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2m(v+\beta L)^2},\frac{\beta\rho AL}{m}\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$\times\left(\widetilde{V}(t)+V_A(t)\right)=-\lambda V(t). \quad (42)$$

식 (42)는 다음을 의미한다.

$$V_{total}(t)\le V_0e^{-\lambda t}.$$

여기서 $V_0=V(0)$ 이고

$$\lambda=\min\left[3\beta,\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2P_0},\frac{\beta\left(P_0-\rho Av^2\right)}{4\rho Av^2},\right.$$
$$\left.\frac{\beta L\left(P_0-\rho Av^2\right)}{2m(v+\beta L)^2},\frac{\beta\rho AL}{m}\left(\frac{v}{(v+\beta L)}-\frac{1}{2}\right)\right]>0$$

이다. 따라서 시스템의 전체 기계적 에너지 식 (21)에서 표현된 시스템의 모든 상태 변수들은 시간이 지남에 따라 지수적으로 영으로 수렴함을 알 수 있다.

4. 우측 경계제어 법칙의 적용

식 (32)에서 제어력은 적용이 가능하지만, 작동 기의 감쇠계수는 범위가 아닌 값으로 설계되었기 때문에 실제 적용에는 제한이 따른다. 따라서 이번 절에서는 제어법칙을 적용하는 방법에 대해서 설명한다.

식 (32)에서 설계된 감쇠계수는 다음과 같다.

$$d_a=\frac{v\rho A\beta L}{v+\beta L}. \quad (43)$$

여기서 β는 식 (38)을 만족해야 한다. 식 (43)은 $\beta>0$ 인 구역에서 증가함수(increasing function) 이므로 β가 식 (38)의 범위를 가질 때 감쇠계수 d_a의 범위는 다음과 같다.

$$0<d_a=\frac{M\rho ALv}{v+ML}. \quad (44)$$

여기서 $M=\min\left\{\frac{v}{L},\frac{P_0}{\rho AL},\frac{1}{L}\right\}$ 이다. 식 (44)의 우측항은 모두 알고 있는 값들이다. 따라서 감쇠계수의 범위는 식 (44)의 범위를 갖도록 설계를 해야 하고 감쇠의 값이 정해지면 β는 식 (38)의 범위에서 정할 수 있으므로 제어기의 게인값 K가 정해진다. 식 (32)에서 각 변화율 $w_{xt}(L,t)$는 매 시간 간격마다 측정된 $w_x(L,t)$의 값을 후방차분(backwards differencing)을 함으로써 $w_{xt}(L,t)$의 값을 계산해 낸다.

5. 시뮬레이션

본 절에서는 이동하는 현의 우측경계제어를

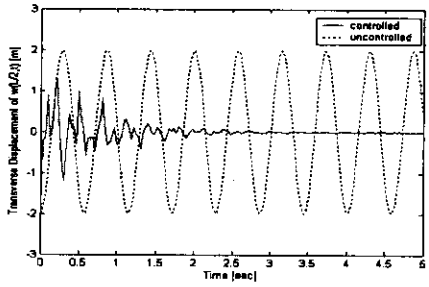

Fig. 4 The transverse displacement with control gain $K = 42$, and damping coefficient $d_a = 100$, $w(L/2,t)$ where $L = 20m$

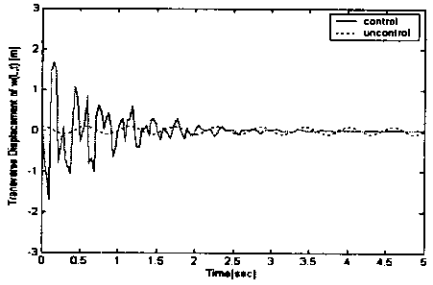

Fig. 5 The transverse displacement with control gain $K = 42$, and damping coefficient $d_a = 100$, $w(L,t)$ where $L = 20m$

유한차분법을 이용한 시뮬레이션을 수행하여, 경계제어 법칙의 타당성을 검토하고자 한다.

중앙·후방차분법(central and backward difference approximations)을 사용하여 운동방정식을 아래와 같은 유한차분식으로 나타낼 수 있다.

$$w_t = \frac{w_i^{n+1} - w_i^{n-1}}{2\Delta t}, \tag{45a}$$

$$w_x = \frac{3w_i^{n+1} - 4w_{i-1}^{n+1} + w_{i-2}^{n+1}}{\Delta t}, \tag{45b}$$

$$w_{xx} = \frac{w_{i-3}^{n+1} + 4w_{i-2}^{n+1} - 5w_{i-1}^{n+1} + 2w_i^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{w_{i+1}^{n+1} - 2w_i^{n+1} + w_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \tag{45c}$$

$$w_{tt} = \frac{w_i^{n+1} - 2w_i^n + w_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \tag{45d}$$

$$w_{xt} = \frac{3w_i^{n+1} - 3w_i^n - 4w_{i-1}^{n+1} + 4w_{i-1}^n + w_{i-2}^{n+1} - w_{i-2}^n}{2\Delta x \Delta t},$$

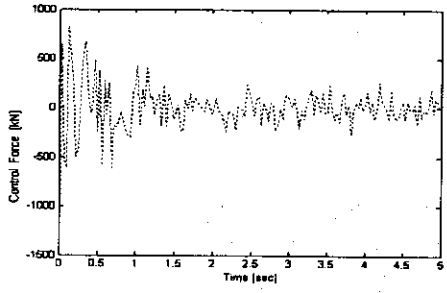

Fig. 6 The control force used in Fig. 4, 5

Table 1 The plant parameters used for simulations

Symbols	Definitions	Values
A	Cross section area	$1.5\times0.005m^2$
L	Length of the controlled part	$20m$
P_0	Tension of the strip	$9800kN$
m	Mass of the actuator	$15kg$
v	Strip moving speed	$2m/s$
ρ	Mass per unit area	$7850kg/m^2$
d_a	Damping coefficient	$100Ns/m$

$$= \frac{w_{i+1}^{n+1} - w_{i+1}^{n-1} - w_{i-1}^{n+1} + w_{i-1}^{n-1}}{4\Delta x \Delta t}. \tag{45e}$$

여기서 n 은 시간스텝(index of time)이고, i 는 격자점(index of spatial variable, x)을 나타 낸다. N개의 격자로 나눈 모델에 대한 유한차 분식을 사용한다.

운동방정식 식 (11a)에 식 (45)의 중앙차분법을 사용 하여 정리하면 다음과 같다.

$$\left[(b+c_i)w_{i+1} + (a-2c_i)w_i + (c_i-b)w_{i-1}\right]^{n+1}$$
$$= 2aw_i^n + \left[bw_{i+1} - aw_i - bw_{i-1}\right]^{n+1}.$$

여기서

$$a = \frac{\rho A}{\Delta t^2}, \tag{47a}$$

$$b = \frac{2\rho A v}{4\Delta x \Delta t}, \tag{47b}$$

$$c_i = -\frac{\left(P_0 - \rho A v^2 + \frac{3EA}{2} w_{xi}^2\right)}{\Delta x^2}, \qquad (47c)$$

이다. 또한 c_i 에서 w_{xi}^2 는 각 격자에서 이전의 시간에서 계산하여 갱신해주도록 해야만 한다. 실제적으로는 w_{xi}^2 항이 1시간스텝만큼의 오차가 발생하지만 이는 시간스텝을 작게 해줌으로 오차를 줄일 수 있다. 식 (47)을 바탕으로 경계 내에서의 격자점의 위치를 계산할 수 있다.

우측경계에서 중앙차분법을 사용하게 되면 격자 점이 N을 넘어서기 때문에 여기서는 후방차분법을 사용한다.

$$\begin{bmatrix} a-2c_2 & c_2+b & \cdots & & 0 \\ c_3-b & a-2c_3 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{N-1}-b & a-2c_{N-1} & c_{N-1}+b \\ 0 & -c_N & b+4c_N & -4b-5c_N & a+3b+2c_N \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 2a & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 2a & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 2a & 0 \\ 0 & & & 0 & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}^{n}$$

$$+ \begin{bmatrix} -a & b & \cdots & & 0 \\ -b & -a & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -b & -a & b \\ 0 & & b & -4b & 3b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}^{n-1} \qquad (48)$$

또한 식 (11a)와 식 (11b)는 우측경계에서는 두 식을 모두 만족해야 한다. 식 (11b)의 우측 항을 모두 좌측으로 옮기면 두 식 모두 영이므로 더해도 식이 성립한다. 이를 고려하면 격자점의 위치를 계산해 낼 수 있다. 본 시뮬레이션에서 사용한 수치들은 Table 1에 나타내었다. 식 (38)을 만족하도록 β 를 0.04로 두면 식 (32)로부터 게인 값과 작동기의 감쇠계수가 구해진다.

$$K = m(v + \beta L) = 15(2 + 0.04 \times 20) = 42,$$

$$d_a = \frac{v\rho A \beta L}{v + \beta L} = \frac{2 \times 7850 \times 1.5 \times 0.005 \times 20 \times 0.04}{2 + 0.04 \times 20} = 33.643 .$$

초기 조건으로

$$w(x,0) = 2\sin(3\pi) cm, \quad w_t(x,0) = 0 \ m/s$$

을 주었다.

시뮬레이션 결과 우측경계의 변화율은 제어를 하거나 하지 않거나 진동이 점근적으로 감소함을 알 수 있으나, 제어를 하지 않고 단순히 감쇠기만 있는 경우에 비해 능동제어에 의한 결과가 아주 빠른 시간 안에 진동이 소진됨을 보이고 있다. Fig. 4, 5는 $x = L/2$, L 일 때 시간에 따른 횡방향 변위의 변화를 제어할 경우와 그렇지 아니할 경우를 비교하여 보여주고 있으며, 본 논문에서 설계한 제어기는 3초안에 횡방향 진동을 소멸시켰음을 보여주고 있다. Fig. 6은 $x = L$ 에서 작동기의 경계제어시의 제어 입력의 변화를 나타낸다. Fig. 7는 시간에 따른 시스템의 에너지의 변화율을 나타내었으며 시간이 지남에 따라 에너지는 지수적으로 감소함을 알 수 있다.

6. 결 론

길이방향으로 이동하는 현의 진동을 줄이기 위해 현의 횡진동을 해석하고, 효과적으로 제어할 수 있는 능동제어기의 개발과 이를 실제적으로 구현할 수 있는 방법을 연구하였다.

지금까지의 연구 논문들은 대부분 작동기의 동역학을 고려하지 않았거나 단순히 선형 현방정식으로 간주하고 연구가 이루어졌으나, 본 논문에서는 이동하는 현과 작동기의 동역학을 비선형 편미분방정식 (nonlinear partial differential equation)으로 해석하고, 횡진동을 제어하기 위해 리아프노프 방법에 의한 시변 우측경계제어 시스템을 제안하였다. 이 경계제어기로 시스템 전체 에너지를 지수적으로 소산시킬 수 있음을 증명하였다. 그리고 시뮬레이션 결과는 본 논문에서 설계된 제어법칙의 효율성을 증명한다.

후 기

본 연구는 과학기술부의 국가지정연구실사업 (과제번호: M1-0302-00-0039-03-J00-00-023-10)의 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

(1) Wickert, J. A. and Mote, C. D., 1988, "On the Energetics of Axially Moving Continua," *Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 85, No. 3, pp. 1365~1368.

(2) Yang, B. and Mote, C. D., 1991, "Active Vibration Control of the Axially Moving String in the S Domain," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, No. 1, pp. 189~196.

(3) Lee, S. Y. and Mote, C. D., 1996, "Vibration Control of an Axially Moving String by Boundary Control," *ASME Journal of Dynamics System, Measurement, and Control*, Vol. 118, No. 1, pp. 66~74.

(4) Lee, S. Y. and Mote, C. D., 1999, "Wave Characteristics and Vibration Control of Translating Beams by Optimal Boundary Damping," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, No. 1, pp. 18~25.

(5) Ying, S. and Tan, C. A., 1996, "Active Vibration Control of the Axially Moving String Using Space Feedfoward and Feedback Controllers," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, No. 1, pp. 306~312.

(6) Li, Y. and Rahn, C. D., 2000, "Adaptive Vibration Isolation for Axially Moving Beams," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 5, No. 4, pp. 419~428.

(7) Li, Y., Aron, D., and Rahn, C. D., 2002, "Axially Vibration Isolation for Axially Moving Strings: Theory and Experiment," *Automatica*, Vol. 38, No. 3, pp. 379~389.

(8) M. P. Fard and S. I. Sagatun., 2001, "Exponential Stabilization of a Transversely Vibrating Beam via Boundary Control." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 4, pp. 613~622.

(9) McIver, D. B., 1973, "Hamiltion's Principle for Systems of Changing Mass," *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 7, No. 3, pp. 249~261.

(10) Wickert, J. A., 1992, "Non-Linear Vibration of a Traveling Tensioned Beam," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 503~517.

(11) Khalil, H., 1996, Nonlinear Systems, Prentice Hall, 2nd edition, pp. 97~166.

(12) Streeter, V. L., Wylie, E. B. and Bedford, K. W., 1998, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, 9th edition, pp. 102~158.

(13) Ryu, D. H. and Park, Y. P., 2000, "Transverse Vibration Control of an Axially Moving Sting by Velocity Boundary Control," *Transactions of the KSME*, A, Vol. 25, No. 1, pp. 135~144.

(14) Lee, S. Y., Sa, J. C., and Lee, M. H., 2002, "Free Vibration and Dynamic Stability of the Axially Moving Continuum with Time-varying Length," *Korea Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 272~279.

(15) Lee, S. Y. and Park, S. G., 1999, "Free Vibration Characteristics of a String with Time-Varying Length," *Korea Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 9, No. 5, pp. 906~913.