

## 원료불출기의 역기구학: 여유자유도와 구속조건을 이용한 닫힌 형태의 해

홍금식\*, 김영민\*\*, 최진태\*\*\*, 신기태\*\*\*

### Inverse Kinematics of a Reclaimer: Redundancy and a Closed-Form Solution by Exploiting Geometric Constraints

Keum-Shik Hong\*, Young-Min Kim\*\*, Chintae Choi\*\*\*, Kitae Shin\*\*\*

#### ABSTRACT

The inverse kinematics problem of a reclaimer which excavates and transports raw materials in a raw yard is investigated. Because of the geometric feature of the equipment in which scooping buckets are attached around the rotating disk, kinematic redundancy occurs in determining joint variables. Link coordinates are introduced following the Denavit-Hartenberg representation. For a given excavation point the forward kinematics yields 3 equations, however the number of involved joint variables in the equations is four. It is shown that the rotating disk at the end of the boom provides an extra passive degree of freedom. Two approaches are investigated in obtaining inverse kinematics solutions. The first method pre-assigns the height of excavation point which can be determined through path planning. A closed form solution is obtained for the first approach. The second method exploits the orthogonality between the normal vector at the excavation point and the z axis of the end-effector coordinate system. The geometry near the reclaiming point has been approximated as a plane, and the plane equation has been obtained by the least square method considering 8 adjacent points near the point. A closed form solution is not found for the second approach, however a linear approximate solution is provided.

**Key Words:** Inverse Kinematics(역기구학), Extra Degree of Freedom(여유자유도), Geometric Constraint(기하학적 구속), Normal vector(법선벡터)

\* 부산대학교 기계기술연구소  
 \*\* 부산대학교 대학원  
 \*\*\* 포항산업과학 연구원(RIST)

### 1. 서론

원료불출기(reclaimer)는 제철소의 원료야적장에 쌓여 있는 철광석, 석탄 등의 원료를 파내어 컨베이어를 통하여 용광로로 이동시킬 때 사용되는 원료불출용 장비이다. 불출기는 길이가 약50m 정도인 대형 크레인 형태로서 레일 위를 구동하는 직선 주행축과, 부움의 수평선회 및 수직선회의 두개의 회전축을 가지고 있다. 불출기의 부움의 끝에는 원료를 파내는 버킷(bucket)들이 회전원통의 원주상에 달려 있고 이 원통을 회전시킴으로서 원료를 파내게 된다. 그런데 원통이 점점 회전함에 따라 버킷에 담겨진 원료들이 쏟아지게 될 때 이것들이 부움의 중앙부를 따라서 설치된 컨베이어 위에 곧바로 떨어지게 하기 위해서 회전원통을 얼마의 경사(tilt)를 두어 부움에 장착하게 된다. 현재 원료야적장에서 수행되고 있는 불출방법은 불출해야 될 강종과 불출량 및 그 강종이 쌓여져 있는 원료더미에 대한 정보가 불출기 운전자에게 전달되고, 운전자의 수동 운전에 의해 불출해야 될 원료더미까지 불출기를 이동시켜서 원료를 불출하고 있다. 그런데 야간이나 우천시에 시야가 어두워질 경우에는 운전자가 불출기의 버킷을 정확히 원료파일에 접근시키기가 어렵게 된다.

본 연구에서는 불출기의 자동운전을 위하여 원료더미에 대한 형상정보가 레이저 등의 센서에 의해 얻어지고 난 다음에, 회전원판의 버킷이 닿아야 할 지점인 불출점의 좌표계를 결정하고 또, 불출기의 각 관절의 회전각(Fig. 2에서  $\theta_2$  및  $\theta_3$ ) 및 본체의 직선주행변위( $d_1$ )를 계산하는 역기구학문제를 해석하고자 한다. 우선 불출기의 자유도를 알아보고, Denavit-Hartenberg 법에 의해서 불출기의 기준좌표계(reference coordinate)와 링크좌표계(link coordinates)등을 설정하고, 이 좌표계를 바탕으로 불출기의 순기구학 방정식을 유도한다. 얻어진 순기구학 방정식에서 나타나는 변수(variables)의 수(4개)는 방정식의 수(3개)보다 많게 되는데 이는 링크좌표계의 설정에 있어서 여유자유도(extra degrees of freedom)를 가짐을 알 수 있다.

원료불출 작업의 첫단계는 3차원 형상인식 시스템을 이용하여 원료더미의 3차원 형상정보를 구하는 일이다. 불출점 및 관절입력의 결정은 다음의 2가지의 방법에 의하여 얻어질 수 있다. 첫 번째는 공간상에 불출점이 주어졌을 때 회전원판의 원주를 이 점에 닿게 하는 시도로서 불출기의 측면에서는 여유자유도를 갖게 된다. 여유자유도에 대한 구속조건을 부여하기 위하여 회전원통이 일정높이의 단을 따라 수평 이동하게끔 경로계획을 한다. 그러면

그 단에 대한  $\theta_3$ 가 정해지고 따라서 순기구학 방정식으로 부터 나머지 변수들을 모두 결정되는 방법이다. 이는 관절 변수 중  $\theta_3$ 을 우선적으로 정하는 방법이 된다. 두 번째는 원료더미에서 국부적으로 소량의 원료만을 불출한다든지 아니면 원료불출 작업이 비바람 등으로 인해 원료더미가 무너졌을 경우 등의 임의의 불출점에 대한 역기구학 해를 구하는 것으로서 원료면에 대한 정보를 이용하게 된다. 3차원 형상곡면을 수식으로 표현하기가 불가능하므로 불출점주변을 평면으로 가정하고 이에 대한 평면방정식을 최소자승법으로 유도한다. 얻어진 평면과 버킷이 불출점에서 서로 접하여야 한다는 기구학적 관계로부터 또 하나의 수식을 유도한다. 따라서 순기구학방정식 3개와 구속조건식 하나를 포함한 도합 4개의 방정식에 대하여 순기구학 방정식에 대한 해 즉, 불출점이 주어졌을 때 관절입력  $d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 을 구하는 역기구학 문제를 수치해석을 통하여 구한다.

본 논문의 순서는 다음과 같다. 먼저 제 2장에서 불출기의 자유도를 조사한다. 제 3장에서 불출기의 링크좌표계를 정의하고 순기구학 방정식을 유도한다. 제 4장에서는 원료의 불출경로를 고려하였을 경우의 역기구학 해를 제시하고, 그리고 제 5장에서는 임의의 불출점에 대한 역기구학해를 수치해석법을 통하여 구한다. 제 6장에서 실제의 원료더미의 형상정보를 이용하여 이들 두 방법에 대한 비교를 수행하고, 제 7장에서 결론을 서술한다.

### 2. 자유도

자유도(degree of freedom)란 메카니즘내의 모든 링크의 임의의 점의 위치를 기준좌표계에 대해 나타내기 위해 요구되는 독립된 입력(independent input or parameters)의 수를 말한다. 원료불출기의 자유도를 결정하기 위해서 Fig. 1과 같이 메카니즘을 도식화해 보자.

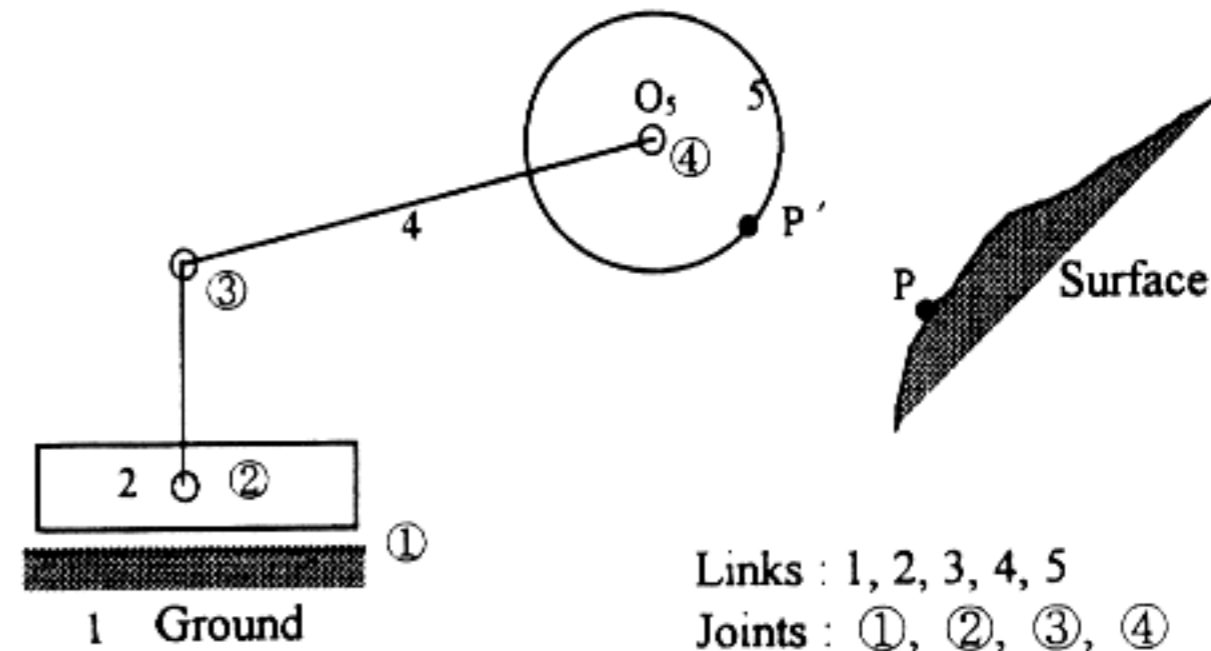


Fig. 1 Reclaimer and its schematic diagram

레일위를 구동하는 본체와 지면사이는 미끄럼 관절 (prismatic joint: ①)로, 그리고 수평회전/수직회전하는 2개의 관절은 회전관절(revolute joint: ②③)로 단순화 되어 표시되었다. 회전원판은 부옴끝에 또 다른 회전관절로 연결되어 있음을 보여주고 있다. 따라서 회전원판상의 임의의 점 P'의 위치를 표시하기 위하여 필요한 독립된 입력의 수는 다음의 식 (1)에 의하여 얻어진다<sup>(1. p.550)</sup>.

$$F = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (1)$$

여기서,  $F$  = 메카니즘의 자유도,  $l$  = 링크의 수,  $j$  = 관절의 수,  $f_i$  =  $i$  번째 관절의 자유도,  $\lambda$  = 공간상에서 메카니즘이 가질 수 있는 자유도를 나타낸다. 따라서 불출기의 경우에  $l = 5, j = 4$ (1개의 미끄럼 관절과 3개의 회전관절), 또한 각각의 관절은 1자유도 관절이므로  $\sum f_i = 4$ 이다.

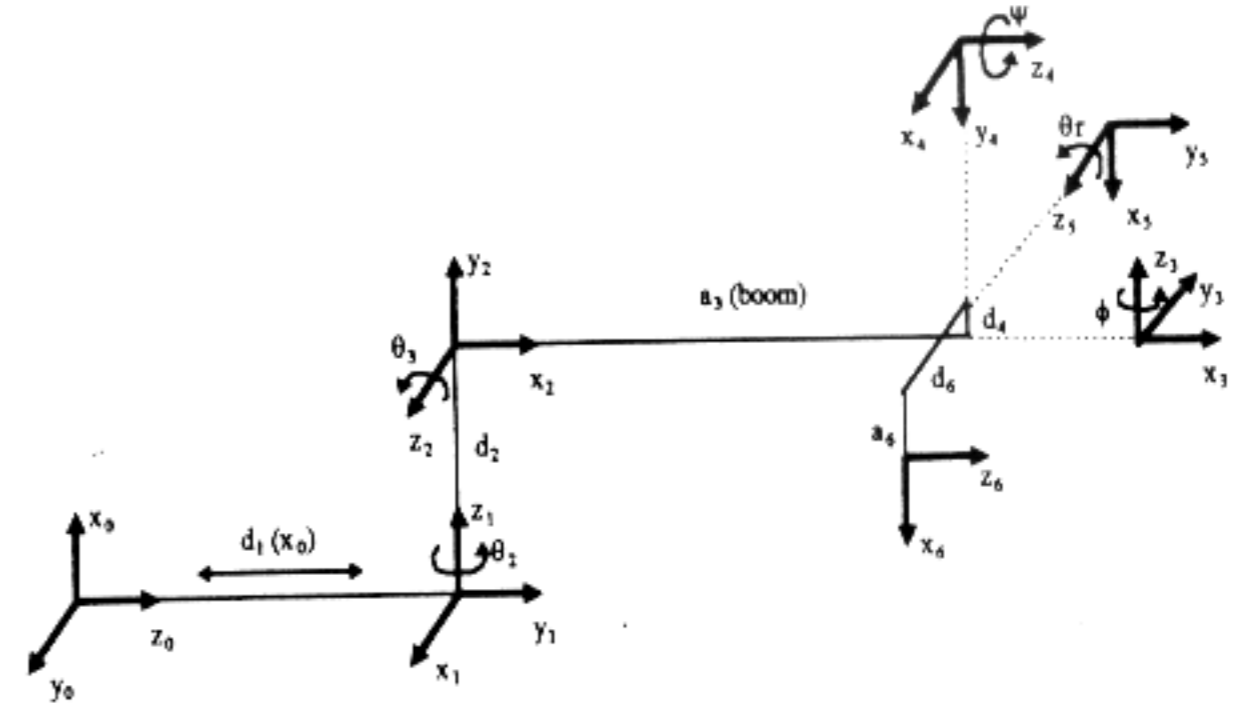
그리고  $\lambda = 6$  (공간운동)이 되어, 불출기의 자유도는  $F = 4$ 가 된다.

또한 회전원주상의 임의의 점 P'의 위치를 찾아내어야만 하는 필요성은 원료터미에 대한 형상정보로부터 불출점 P와 원료면에 대한 평면방정식이 주어지면 원주상의 P'점이 결정되어야 한다는 점으로부터 분명해진다. 그러나 일단 P'점과 P점이 접하게 되면, 위의 식 (1)에서  $F = 0$ 가 되어 메카니즘 내부에 더 이상의 유동(mobility)이 없음을 알 수 있다. 이때의 접점 P는 미끄럼과 구름이 있는 2자유도 관절로 간주되었다.

이제 메카니즘의 입력-출력 관계를 검토해 보자. 출력은 P'점의 3차원 공간상의 좌표값( $x_0, y_0, z_0$ )이 되는데 반하여 입력은 링크 2의 미끄럼 변위와 링크 3, 4의 회전 변위가 된다. 통상적으로는 서로 독립된 3개의 입력으로 공간상의 위치(3개의 성분)를 완전히 나타낼 수 있지만, 불출기의 경우에는 회전원판(링크 5)이 그 중간에 놓이게 되어, 링크 5의 회전각도는 메카니즘의 입출력관계에 있어서 여유자유도(extra degree of freedom)가 된다. 제 3장에서 도입된 링크좌표계들과 본 장의 자유도를 상관시킬 때 Fig. 2의 관절변수  $d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r$ 이 자유도를 결정하는 독립변수가 된다.

### 3. 좌표계의 설정

Fig. 2는 기구학해석을 위한 기준좌표계 및 링크좌표계의 설정을 나타내고 있다. 또, 불출기의 첨단부(end-



| $i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ | $d_i$ | $\theta_i$         |
|-----|-------|------------|-------|--------------------|
| 1   | 0     | $\pi/2$    | $d_1$ | $\pi/2$            |
| 2   | 0     | $\pi/2$    | $d_2$ | $\pi/2 + \theta_2$ |
| 3   | $a_3$ | $-\pi/2$   | 0     | $\theta_3$         |
| 4   | 0     | $-\pi/2$   | $d_4$ | $-\pi/2 + \phi$    |
| 5   | 0     | $\pi/2$    | 0     | $\pi/2 + \psi$     |
| 6   | $a_6$ | $-\pi/2$   | $d_6$ | $\theta_r$         |

Fig. 2 Link coordinate systems and parameters

effector)인 버킷의 선단과 기준좌표계 사이의 변환관계를 구하기 위하여 각 관절들을 Denavit-Hartenberg 표시법에 의해 좌표계를 설정하고 ( $x_0, y_0, z_0$ )로 표시되는 기준좌표계와 ( $x_i, y_i, z_i$ )로 표시되는 링크좌표계의 사이의 기구학적 인자를 Fig. 2의 도표에서 나타낸다. 각 링크좌표계의  $z_{i-1}$  축은  $i$ 번째 관절의 운동축에 대응하게 정의한 뒤 오른손법칙을 사용하여  $x_{i-1}, y_{i-1}$  축을 정의하였다. 여기서  $a_i$ 는  $z_{i-1}$  축과  $z_i$  축 사이의 오프셋 거리(offset distance)를 나타내며,  $\alpha_i$ 는  $x_i$  축을 회전축으로  $z_i$  축이  $z_{i-1}$  축으로부터 회전된 각도를 의미하고,  $d_i$ 는  $z_{i-1}$  축과  $x_i$  축의 교점이  $z_{i-1}$  축 방향으로  $(i-1)$ 번째 좌표축의 원점으로부터 오프셋된 양을 나타내고,  $\theta_i$ 는  $z_{i-1}$  축을 중심으로  $x_i$  축이  $x_{i-1}$  축으로부터 회전된 각도를 나타낸다<sup>(2)</sup>. 레일 위를 움직이는 몸체에 부착시킨 아래첨자 1번의 링크좌표계는 기준좌표계(아래첨자 0)에 대하여  $z_0$ 축 방향으로  $d_1$ 만큼 평행이동하고 있다. 부옴에 부착된 수평, 수직회전하는 2, 3번의 좌표계는 각각  $\theta_2, \theta_3$ 의 각도로 부옴이 회전할 수 있음을 보이고 있고, 붐 끝에 매달린 회전원판에 부착된 4, 5번의 좌표계는  $\phi$  및  $\psi$ 의 상수값 만큼 회전원판이 경사(tilt)되어 있음을 보이고 있다. 그리고  $\theta_r$ 은 Fig. 2에서  $z_5$  축을 중심으로  $x_6$  축이  $x_5$  축으로부터 회전된 각도로서, 회전원통상에 달려 있는 여러개의 버킷들 중에서 과연 어느 것이 불출점에 접하게 되는가에 대한 문제가 되는데, 본 논문에서 여유자유도(redundancy)가 발생되게 되는 핵심이 된다. Fig. 2의 파라미

터 값을 좌표변환 행렬에 대입하면 각 링크좌표계 사이의 다음과 같은 행렬을 구할 수 있다.

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 & a_3 \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 & a_3 \cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5A_6 = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & 0 & -\sin\theta_r & a_6 \cos\theta_r \\ \sin\theta_r & 0 & \cos\theta_r & a_6 \sin\theta_r \\ 0 & -1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

불출점은 버킷의 끝부분이 원료파일과 접하는 지점으로 불출점결정 알고리즘에서 결정된다. 최초의 불출점의 좌표값이 기준좌표계상에서  $(x_0, y_0, z_0)$ 로 주어진다고 가정할 때, 각 링크좌표계들의 인자값들로 표현된 불출기의 순기구학 방정식은 다음과 같다.

$$x_0 = \sin\theta_3 \{a_6 \cos\phi \sin\theta_r + \sin\phi(d_6 \cos\phi - a_6 \sin\phi \cos\theta_r)\} + \cos\theta_3 \{-a_6 \cos\phi \cos\theta_r - d_6 \sin\phi + d_4\} + a_3 \sin\theta_3 + d_2 \quad (2)$$

$$y_0 = -\sin\theta_2 \{\cos\theta_3 \{a_6 \cos\phi \sin\theta_r + \sin\phi(d_6 \cos\phi - a_6 \sin\phi \cos\theta_r)\} - \sin\theta_3 \{-a_6 \cos\phi \cos\theta_r - d_6 \sin\phi + d_4\} + a_3 \cos\theta_3\} + \cos\theta_2 \{\cos\phi(d_6 \cos\phi - a_6 \sin\phi \cos\theta_r) - a_6 \sin\phi \sin\theta_r\} \quad (3)$$

$$z_0 = \cos\theta_2 \{\cos\theta_3 \{a_6 \cos\phi \sin\theta_r + \sin\phi(d_6 \cos\phi - a_6 \sin\phi \cos\theta_r)\} - \sin\theta_3 \{-a_6 \cos\phi \cos\theta_r - d_6 \sin\phi + d_4\} + a_3 \cos\theta_3\} + \sin\theta_2 \{\cos\phi(d_6 \cos\phi - a_6 \sin\phi \cos\theta_r) - a_6 \sin\phi \sin\theta_r\} + d_1 \quad (4)$$

식 (2)-(4)를 살펴보면 방정식의 개수는 3개인데 반하여 미지수는 4개 ( $d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r$ )로서 관절변수 결정에 있어서 여유자유도가 존재하고, 유일한 역기구학 해를 구하기 위해서는 방정식이 하나 더 필요함을 알 수 있다. 이는 Fig. 3에서 보는 바와 같이 버킷의 끝을 연결한 원이 불출점을 통과하는 경우를 고려할 때 점선으로 표시된 원들과 같이 수많은 원들이 존재함으로써부터도 알 수 있다. 그러나, 버킷의 중심이 주어졌을 때 다음과 같은 닫힌 형태의 해를 구할 수 있다. 버킷의 중심의 좌표를  $(x_c, y_c, z_c)$ 라 할 때 순기구학 방정식은 다음과 같이 된다.

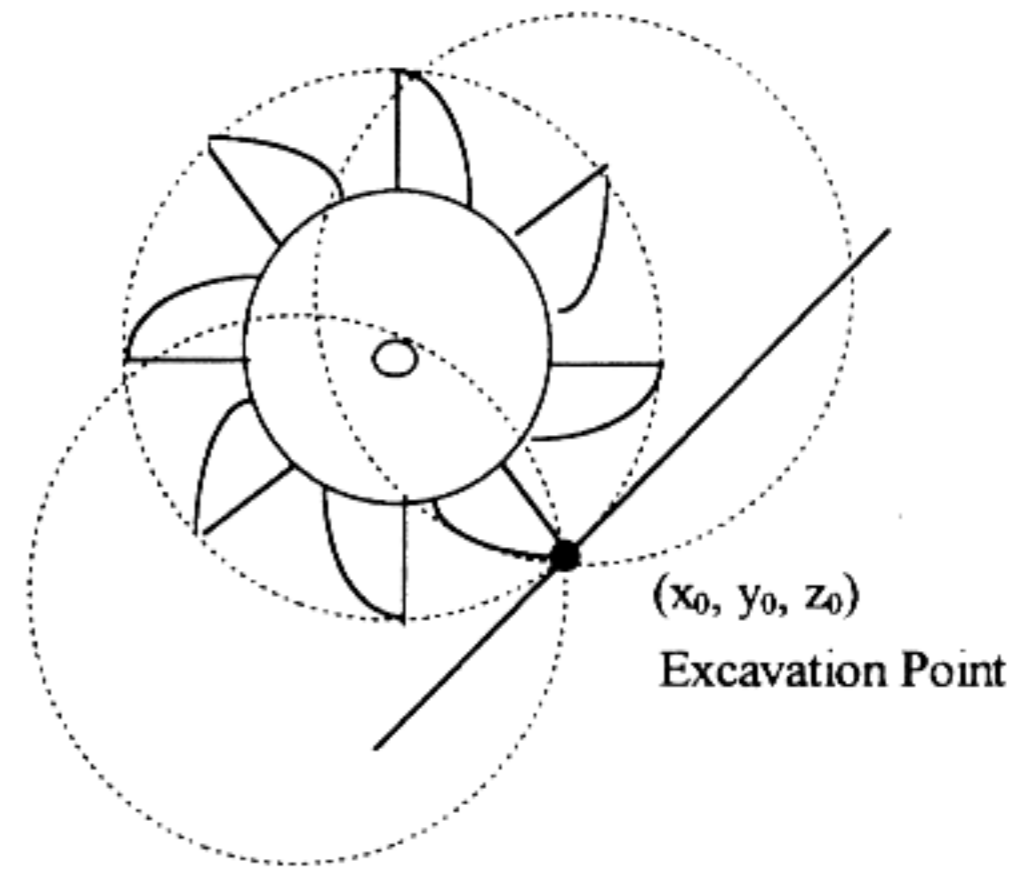


Fig. 3 Infinitely many circles passing through an excavation point

$$x_c = d_6 (\sin\phi \cos\phi \sin\theta_3 - \sin\phi \cos\theta_3) + a_3 \sin\theta_3 + d_4 \cos\theta_3 + d_2 \quad (5)$$

$$y_c = d_6 (\cos\phi \cos\phi \sin\theta_2 - \sin\theta_2 (\sin\phi \sin\theta_3 + \sin\phi \cos\phi \cos\theta_3)) - \sin\theta_2 (a_3 \cos\theta_3 - d_4 \sin\theta_3) \quad (6)$$

$$z_c = d_6 (\cos\theta_2 (\sin\phi \sin\theta_3 + \sin\phi \cos\phi \cos\theta_3) + \cos\phi \cos\phi \sin\theta_2) + \cos\theta_2 (a_3 \cos\theta_3 - d_4 \sin\theta_3) + d_1 \quad (7)$$

따라서 식 (5)-(7)로부터, 닫힌 형태의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$\theta_3 = -a \tan 2(B_c, A_c) \pm a \tan 2(x_c - d_2, \sqrt{(A_c^2 + B_c^2 - (x_c - d_2)^2)}) \quad (8)$$

$$\theta_2 = -a \tan 2(D_c, C_c) \pm a \tan 2(\sqrt{C_c^2 + D_c^2 - y_2^2}, y_2) \quad (9)$$

$$d_1 = z_c - d_6 (\cos\theta_2 (\sin\phi \sin\theta_3 + \sin\phi \cos\phi \cos\theta_3) + \cos\phi \cos\phi \sin\theta_2) + \cos\theta_2 (a_3 \cos\theta_3 - d_4 \sin\theta_3) \quad (10)$$

여기서,

$$A_c = d_6 \sin \phi \cos \phi + a_3$$

$$B_c = d_4 - d_6 \sin \phi$$

$$C_c = d_6 \cos \phi \cos \phi$$

$$D_c = d_6 (\sin \phi \sin \theta_3 + \sin \phi \cos \phi \cos \theta_3) + a_3 \cos \theta_3 - d_4 \sin \theta_3$$

이다.

#### 4. 역기구학 (방법 1)

본 장에서는 불출경로 즉 부움의 선회(slew) 높이가 정해졌을 경우의 역기구학 해를 고려해 보자. 이는 원료더미 전체의 형상을 보고 어떠한 순서로 파 내려가야 최종적으로 지상에 남김이 없이 작업이 마쳐질 수 있는가에 초점을 둔 방법이다.

##### 4.1 경로계획(Path Planning)

Fig. 4와 같이 부움의 선회운동(slew motion) 시 원료면의 높이가  $R \cos \phi$  만큼씩 내려간다고 가정하자. 여기서  $R$ 은 회전원통의 반경이고,  $\phi$ 는 회전원통이 연직면으로부터 기울어진 각도이다. 따라서 회전원통의 중심이 Fig. 4에서처럼  $h_i$ 에 이르게 되면 지상에 남김이 없는 완벽한 원료송출이 가능하게 된다. Fig. 4에서 실선( $h_i$ )은 회전원통의 중심이 지나가는 높이를 나타내며,  $h_i = i(R \cos \phi)$ 이 된다. 각 단의 불출점의 좌표를  $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i})$ 로 나타내고, 본 절에서는 각 단에서 부움이 원료더미의 좌/우측에서 선회를 시작하게 되는 불출점  $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i})$ 을 결정하는데 있다.

먼저  $\Delta h_i = x_{0i} - h_i$ 을 정의한다. 또한  $\theta_m$ 은 원료더미가 쌓이게 될 때 더미가 이루는 안식각이며, 본 논문에서는 원료의 종류가 정해지면 안식각  $\theta_m$ 은 일정하다고 가정한다.

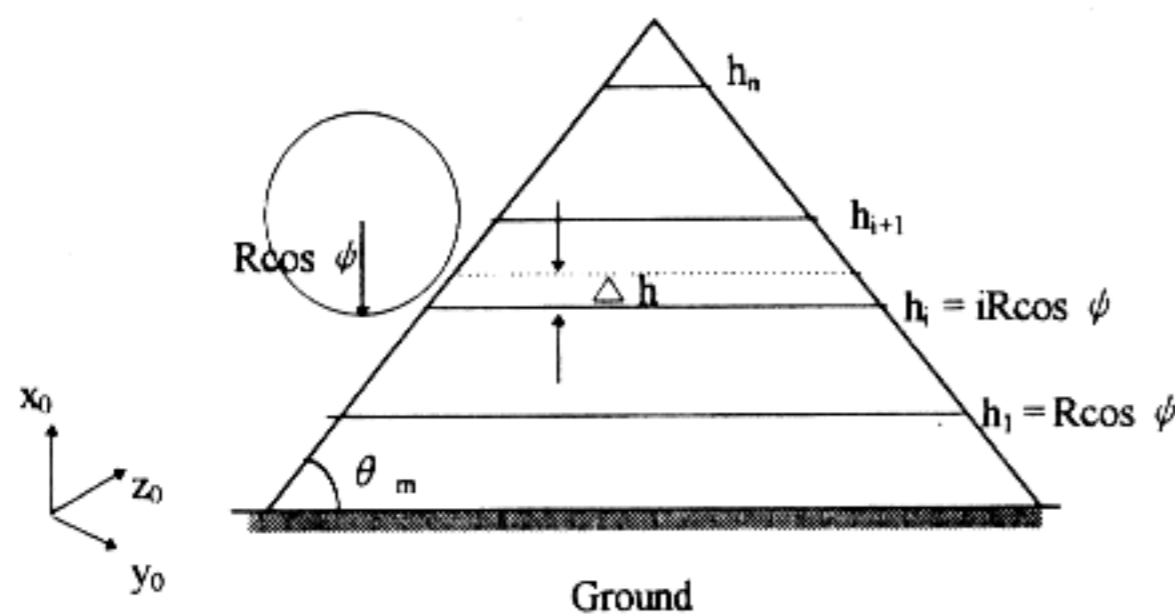


Fig. 4 Slewing levels of the boom

##### 4.2 $\Delta h_i$ 의 계산

우선 각 단에 있어서 선회 시작점의 좌표값을 구하기 위해  $\Delta h_i$ 를 구하여 보자.  $\Delta h_i$ 는 원료더미가 쌓이는 각도가 불규칙하면 각 단에 따라 서로 다른 값을 가질 수 있다. 그러나 원료더미가 쌓이는 모양이 균일하고 재질에 따라 안식각이 일정하다고 가정하면  $\Delta h_i = \Delta h = \text{constant}$ 가 된다. 본 논문에서는 원료더미가 균일하게 쌓이고 안식각이 일정하다고 가정한다.

Fig. 5는 Fig. 2에서 2번 링크좌표계의  $z_2$  축을 5번 링크좌표계의 중심( $O_5$ )에 위치시키고 회전원판을  $x_2 y_2$  평면에 투영( $z_2$  축과 평행하게)한 그림이다. Fig. 5에서  $uv$  평면은 연직면으로서 회전원판의 중심을 원점으로 하고,  $u$  축은  $y_0 z_0$  평면과  $v$  축은  $x_0$  축과 각각 평행하게 된다.  $u'v'$  좌표계는  $uv$  좌표계가  $\theta_3$ 만큼 회전된 좌표계이다. 그러나 실제의 회전원판은  $\phi, \psi$ 만큼 회전되어 있기 때문에 이를  $u'v'$  평면에 투사시키면 타원이 되고, 이 때  $u'v'$  좌표계에서의 타원의 방정식은 다음과 같다.

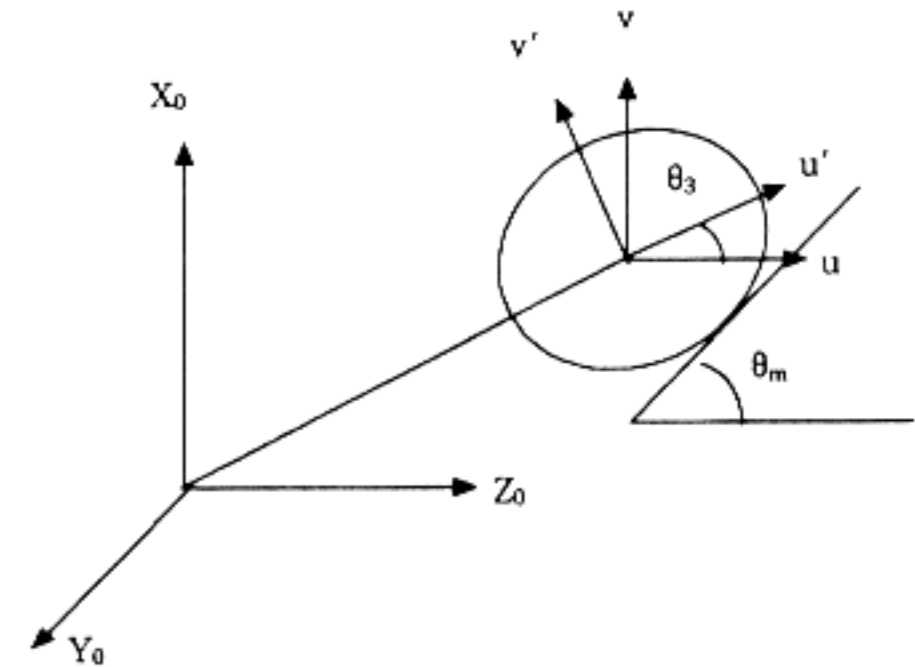


Fig. 5 Lateral face of the cylinder viewed from the  $z_2$ -axis

$$\frac{u'^2}{(R \cos \phi)^2} + \frac{v'^2}{(R \cos \phi)^2} = 1 \quad (11)$$

또한  $u'v'$  좌표계는  $uv$  좌표계에 대해서  $\theta_3$ 만큼 회전되었으므로 다음의 변환관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (12)$$

따라서,  $uv$  좌표계에서의 타원의 방정식은

$$\frac{(\cos \theta_3 u + \sin \theta_3 v)^2}{(R \cos \phi)^2} + \frac{(-\sin \theta_3 u + \cos \theta_3 v)^2}{(R \cos \phi)^2} = 1 \quad (13)$$

이 된다.

มุม이  $\theta_2$ 로 선회함에 따라 부하가 가장 많이 걸리게 되는 점은 원료더미가 부음의 회전중심 방향으로 가장 많이 옮겨져 나온 부분이 된다. 그리고 uv 평면과 원료면의 교점이 만드는 직선의 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$v = \tan \theta_m u + \eta \quad (14)$$

이제 식 (13)과 식 (14)를 연립하게 되면 일반적으로 타원과 직선이 만나는 두점의 좌표값이 얻어지게 된다. 문제의 필요성에 따라 타원과 직선을 접하게 하면 그 접점의 좌표값은 다음과 같이 된다.

$$u = \frac{-\eta\{(R \cos \phi)^2 (\cos \theta_3 + \sin \theta_3 \tan \theta_m) \sin \theta_3 + (R \cos \phi)^2\}}{\{(R \cos \phi)^2 (\cos \theta_3 + \sin \theta_3 \tan \theta_m)^2 + (R \cos \phi)^2\}} \frac{(\cos \theta_3 \tan \theta_m - \sin \theta_3) \cos \theta_3}{(\cos \theta_3 \tan \theta_m - \sin \theta_3)^2}$$

$$v = \tan \theta_m u + \eta \quad (15)$$

여기서

$$\eta = -\frac{\sqrt{Q}(R \cos \phi)(R \cos \phi)}{\sqrt{Q(R \cos \phi)^2 \sin^2 \theta_3 + Q(R \cos \phi)^2 \cos^2 \theta_3} - P}$$

$$P = (R \cos \phi)^2 (\cos \theta_3 + \sin \theta_3 \tan \theta_m) \sin \theta_3 + (R \cos \phi)^2 (\cos \theta_3 \tan \theta_m - \sin \theta_3) \cos \theta_3$$

$$Q = (R \cos \phi)^2 (\cos \theta_3 + \sin \theta_3 \tan \theta_m)^2 + (R \cos \phi)^2 (\cos \theta_3 \tan \theta_m - \sin \theta_3)^2$$

이다.

이제 회전원판의 중심을  $h_{i+1}$ 에 위치시켜  $h_i$ 까지 파 내려간다고 가정하면 uv 좌표계의 원점은  $h_{i+1}$  상에 위치하게 된다. 따라서

$$\Delta h_i = h_{i+1} - h_i - |v|$$

이고, 각 단에 대한  $\Delta h_i$ 를 구했기 때문에 최종적으로 기준좌표계에 대한 각 단에서의 불출점  $x_{0i}$ 가 결정되게 된다.

### 4.3 역기구학 해

4.2절에서 불출시작점의  $x_0$ -성분이  $h = h_i + \Delta h_i$ 로 부터 얻어졌다. 또한 원료더미의 형상정보와 불출점 결정

알고리즘으로부터  $y_0, z_0$ 가 주어진다고 가정한다. 여기서  $\phi, \psi$ 만큼 회전된 회전원판의 중심의 좌표값을 3번 링크 좌표계로 나타내면 다음과 같다.

$${}^3P = {}^3A_5 {}^5P$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_6 \sin \phi \cos \phi \\ -d_6 \cos \phi \cos \phi \\ -d_6 \sin \phi + d_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (16)과 Fig. 6을 이용해서 점 A, B, P를 2번 링크 좌표계로 나타내면 다음과 같다.

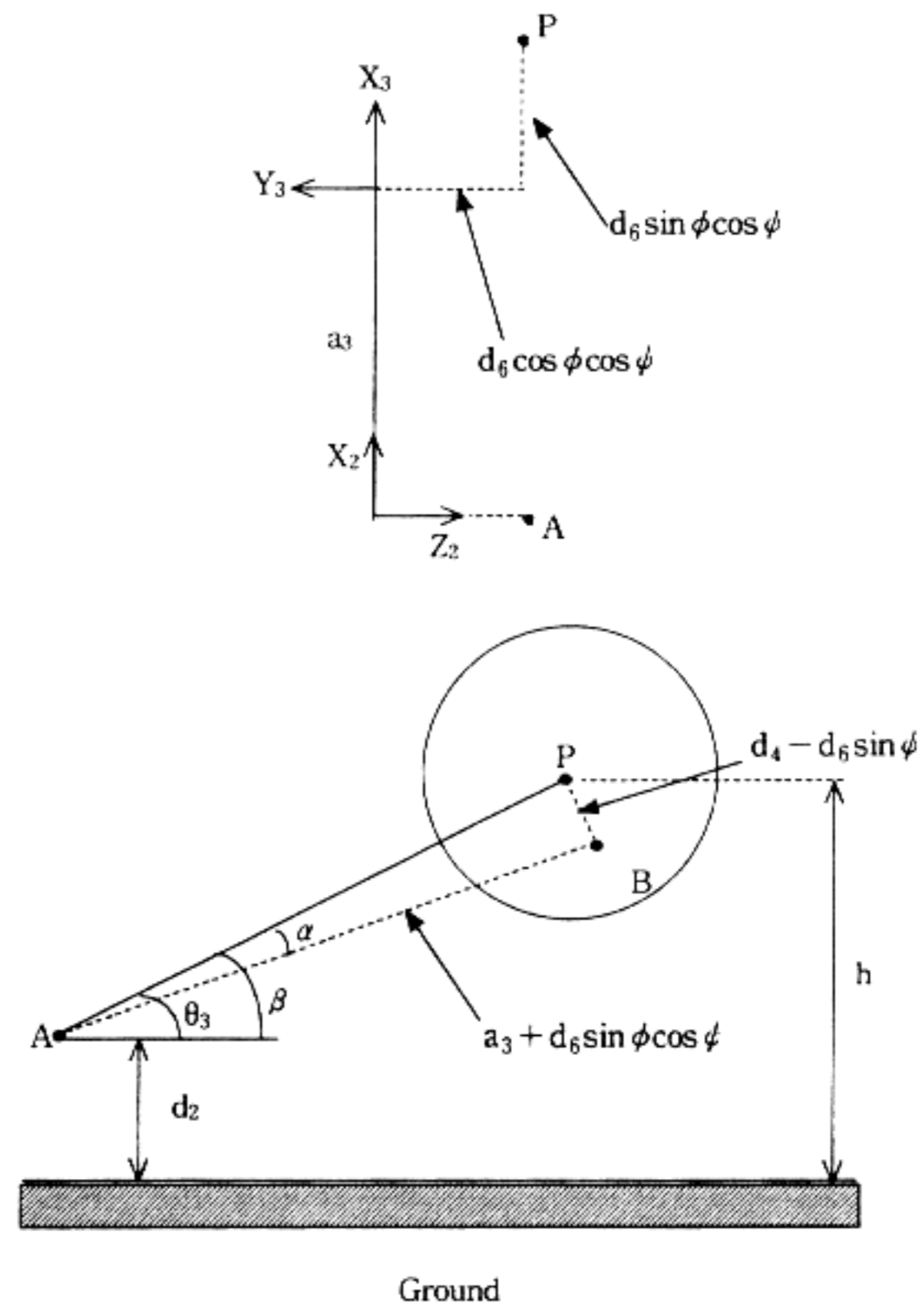


Fig. 6 Geometry for obtaining  $\theta_3$

$$P = (a_3 + d_6 \sin \phi \cos \phi, -d_6 \sin \phi + d_4, d_6 \cos \phi \cos \phi)$$

$$A = (0, 0, d_6 \cos \phi \cos \phi)$$

$$B = (a_3 + d_6 \sin \phi \cos \phi, d_6 \cos \phi \cos \phi)$$

여기서 P 는 회전원통의 중심점이고, A 는 2번 링크좌표계의 원점을  $z_2$  방향으로  $d_6 \cos \phi \cos \phi$  만큼 평행 이동된 점, 그리고 B 는 회전원통의 중심을  $x_2z_2$  평면에 투영된 점이다. Fig. 6의 윗부분은  $x_0$  축에서  $y_0z_0$  평면으로 바라다 본 그림이고, 아랫부분은 2번 링크좌표계의  $z_2$  축을 5번 링크좌표계의 중심( $O_5$ )에 위치시키고 회전원판을  $x_2y_2$  평면에 투영( $z_2$  축과 평행하게)한 그림이다. 이제 Fig. 6으로부터 관절변수  $\theta_3$ 는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\theta_3 = \beta - \alpha = a \tan 2(\sin \beta, \sqrt{1 - \sin^2 \beta}) - a \tan 2(-d_6 \sin \phi + d_4, a_3 + d_6 \sin \phi \cos \phi) \quad (17)$$

여기서

$$\sin \beta = \frac{h - d_2}{\sqrt{(a_3 + d_6 \sin \phi \cos \phi)^2 + (d_6 \sin \phi + d_4)^2}}$$

이다.

이제 순기구학 방정식 (2), (3), (4)로부터 다음과 같은 최종적인 역기구학 해가 구해진다.

$$\theta_1 = a \tan 2(B, A) \pm a \tan 2(x_0 - C, \sqrt{A^2 + B^2 - (x_0 - C)^2}) \quad (18)$$

$$\theta_2 = -a \tan 2(E, D) \pm a \tan 2(\sqrt{D^2 + E^2} - y_0, y_0) \quad (19)$$

$$d_7 = z_0 - \cos \theta_2 [\cos \theta_3 \{a_6 \cos \phi \sin \theta_1 + \sin \phi (d_6 \cos \phi - a_6 \sin \phi \cos \theta_1)\} - \sin \theta_3 \{-a_6 \cos \phi \cos \theta_1 - d_6 \sin \phi + d_4\} + a_3 \cos \theta_3] + \sin \theta_2 \{\cos \phi (d_6 \cos \phi - a_6 \sin \phi \cos \theta_1) - a_6 \sin \phi \sin \theta_1\} \quad (20)$$

여기서

$$A = a_6 \sin \theta_3 \cos \phi$$

$$B = a_6 (\sin \phi \sin \theta_3 + \cos \phi \cos \theta_3)$$

$$C = d_6 \sin \phi \cos \phi \sin \theta_3 - d_6 \sin \phi \cos \theta_3 + d_4 \cos \theta_3 + a_3 \sin \theta_3 + d_2$$

$$D = \cos \phi (d_6 \cos \phi - a_6 \sin \phi \cos \theta_1) - a_6 \sin \phi \sin \theta_1$$

$$E = \cos \theta_3 \{a_6 \cos \phi \sin \theta_1 + \sin \phi (d_6 \cos \phi - a_6 \sin \phi \cos \theta_1)\} + \sin \theta_3 \{a_6 \cos \phi \cos \theta_1 + d_6 \sin \phi - d_4\} + a_3 \cos \theta_3$$

이다.

### 5. 역기구학 (방법 2)

본 장에서는 원료더미 상의 임의의 점이 주어지고, 이 점을 포함한 불출면에 버킷의 회전원통이 접하기 위한 최적의 관절변수들의 값을 구하는 문제를 고려한다.

### 5.1 평면방정식의 유도

식 (2)-(4)에서 나타난 것처럼 미지수의 수가 방정식의 수보다 하나 더 많으므로 역기구학 문제에 대한 닫힌 해를 구하기 위한 시도로서 최소한 하나의 방정식이 더 필요하게 된다. 물론 또 하나의 방정식이 구해진 다음에 이에 대한 닫힌 해를 얻을 수 있는가는 다음 순서의 문제가 된다. 본 논문에서는 이러한 또 하나의 방정식을 불출면과 버킷끝점들이 이루는 원이 접한다는 구속조건으로부터 구하기로 한다.

먼저, 레이저 센서로부터 얻어진 원료파일에 대한 3차원 정보로부터 불출점 주위의 평면방정식을 구하여 보자. 임의의 형상을 하고 있는 원료파일 전체를 나타낼 수 있는 곡면 혹은 곡선에 대한 방정식을 얻는 것은 실제로 불가능하다. 따라서 불출점 부근에 국한하여 곡면을 평면으로 근사화하고 버킷이 이 평면에 접한다고 가정하기로 한다. 평면방정식은 Fig. 7에 표시된 것처럼 불출점 주변의 8개의 점들의 3차원 좌표값들로부터 최소자승법을 통하여 유도된다. 평면에 대한 법선벡터를  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 라 할 때 일반적인 평면방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = 1 \quad (21)$$

9개의 점들을 식 (21)에 대입하여 행렬식으로 나타내면 다음이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

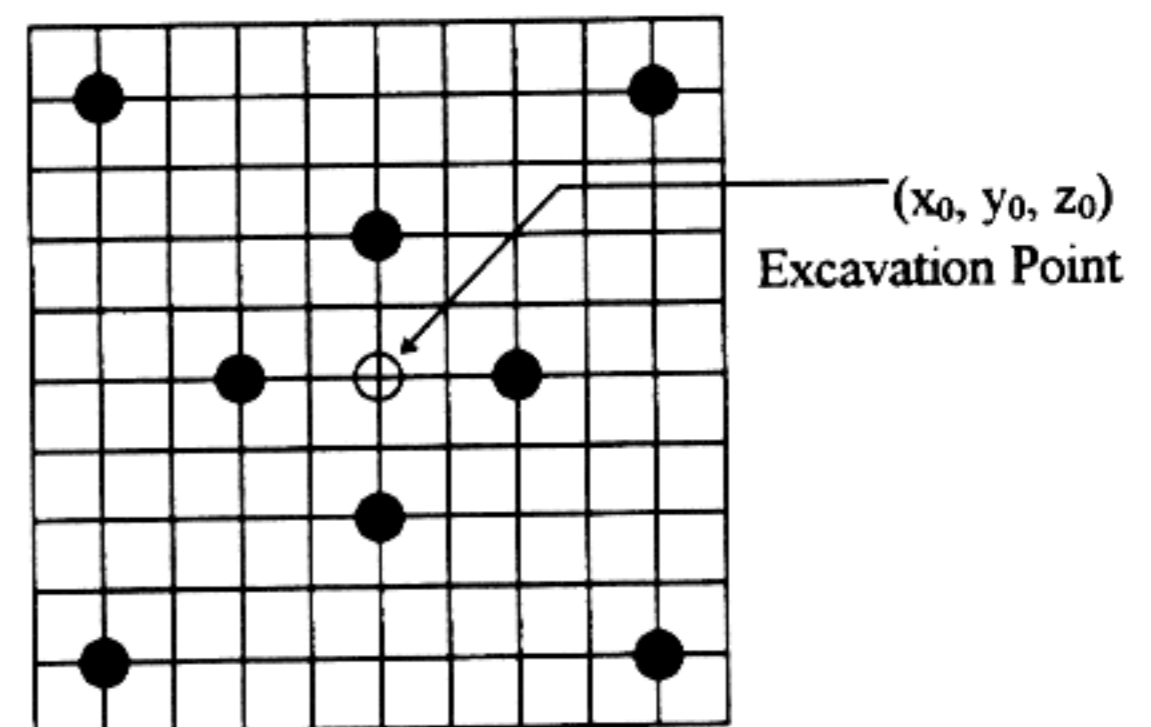


Fig. 7 Selected 8 adjacent points for the least square method

간략히 하여

$$W \cdot \hat{n} = u$$

로 나타낸다. 여기서  $W$  는  $9 \times 3$ 행렬,  $\hat{n}$  는 법선벡터 그리고  $u$ 는 요소의 값이 모두 1인 열벡터이다. 행렬  $W$  는 9개의 점들이 서로 다른 좌표값을 가지므로 독립된 열벡터들을 가진다. 또한  $W^T W$  는 정방행렬이면서 대칭행렬이 되고, 또 역행렬도 존재하므로 식 (22)를 만족하는 평면의 법선벡터  $\hat{n}$  는 다음과 같이 정규방정식(normal equation)의 해로 주어진다<sup>(3)</sup>.

$$\hat{n} = (W^T W)^{-1} W^T u \quad (23)$$

얻어진 평면방정식의 신뢰성은 선택된 9개의 점들의 격자 간격에 의해 결정되며 오차를 줄이기 위해 점들의 수를 늘일 수도 있겠다.

### 5.2 구속방정식과 일차근사를 통한 해

원료파일에 대한 형상정보는 불출면의 법선벡터로서 식 (23)과 같이 결정되므로, 이제 버킷의 선단이 원료파일의 표면에 접해야 한다는 점을 이용하기로 한다. 즉, Fig. 8에 나타낸 바와 같이 버킷에 부착된 6번 링크좌표계의  $z_6$  축과 불출면의 법선벡터가 항상 수직이 되어야 한다는 것이다. 이 조건을 정리하면 식 (24)와 같다.

$$\begin{aligned} & n_y [\cos \theta_2 (\cos \phi \sin \phi \sin \theta_r - \sin \phi \cos \theta_r)] \\ & - \sin \theta_2 \{ \cos \theta_3 \cdot (\sin \phi \sin \phi \sin \theta_r + \cos \phi \cos \theta_r) - \cos \phi \sin \theta_3 \sin \theta_r \} \\ & + n_z \cdot [\cos \theta_2 \{ \cos \theta_3 (\sin \phi \sin \phi \sin \theta_r + \cos \phi \cos \theta_r) \\ & - \cos \phi \sin \theta_3 \sin \theta_r \} + \sin \theta_2 (\cos \phi \sin \phi \sin \theta_r - \sin \phi \cos \theta_r)] \\ & + n_x [\sin \theta_3 \cdot (\sin \phi \sin \phi \sin \theta_r + \cos \phi \cos \theta_r) + \cos \phi \cos \theta_3 \sin \theta_r] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

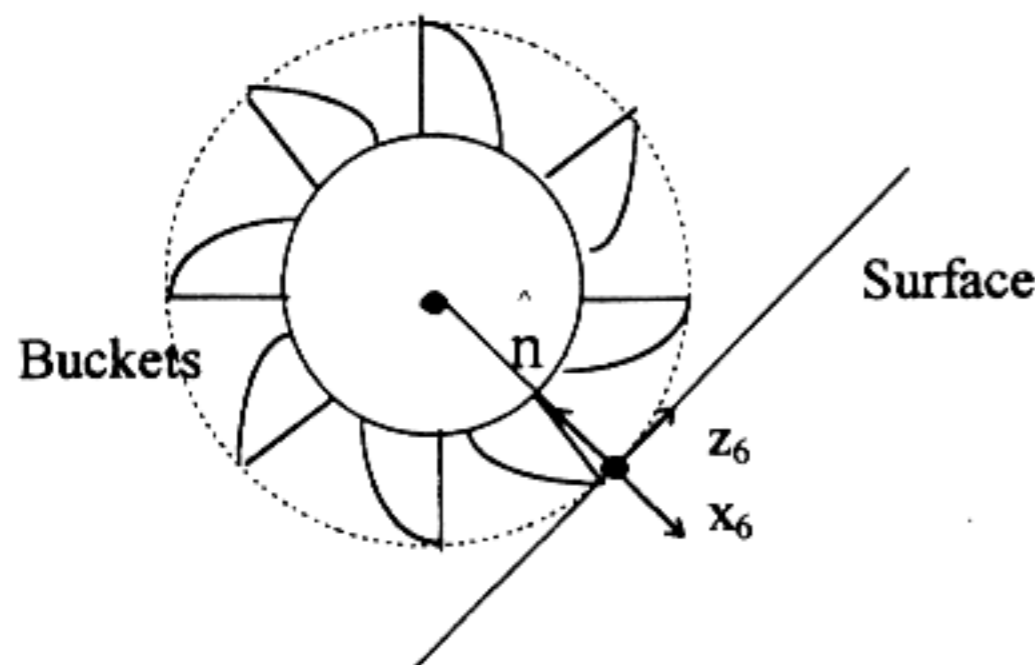


Fig. 8 Orthogonality between  $z_6$ -axis and  $\hat{n}$

이상에서 얻어진 불출기의 순기구학방정식 (2)-(4)와 구속조건식 (24)를 사용하므로써 불출기의 역기구학 해석이 가능하게 된다. 그런데 유도된 식들은 삼각함수가 포함된 비선형 3차방정식으로서 닫힌 형태의 해가 불가능하다. 본 논문에서는 일차 근사화에 의한 역기구학해를 구하기로 한다. 식 (2)-(4) 및 (24)를 다음과 같이 나타내어 보자.

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r) \\ y_0 &= f_2(d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r) \\ z_0 &= f_3(d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r) \\ 0 &= f_4(d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r) \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)를  $\theta_0 = [d_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_r^0]^T$  에서 Taylor 전개하여 일차항까지만 남기면 다음이 된다.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \theta_0 + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial d_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial f_3}{\partial d_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial f_4}{\partial d_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_r} \end{bmatrix} \theta_0 \begin{bmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_r \end{bmatrix} \quad (26)$$

간략히 하면

$$X = f(\theta_0) + J(\theta_0) \Delta \theta \quad (27)$$

이 된다. 여기서  $X = [x_0, y_0, z_0, 0]^T$  이다. 따라서

$$\Delta \theta = J^{-1}(\theta_0)(X - f(\theta_0)) \quad (28)$$

이 된다. 이제 다음과 같이 계속적으로 수정함으로써 보다 수렴된 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{i+1} &= J^{-1}(\theta_i)(X - f(\theta_i)), \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \Delta \theta_{i+1} \\ \text{If } \|\Delta \theta_{i+1}\| < \epsilon, & \text{ then stop.} \end{aligned} \quad (29)$$

여기서  $\epsilon$  은 설정된 허용오차범위이며 이 허용범위 이하가 될 때까지 반복 계산함으로써 보다 정확한 역기구학해  $\theta = [d_1, \theta_2, \theta_3, \theta_r]^T$  를 구할 수 있다<sup>(4)</sup>.



### 6. 비교 및 검토

본 장에서는 4장에서 유도된 경로계획을 통한 역기구학 해(방법1)와 5장에서 유도된 법선벡터를 이용한 역기구학 해(방법2)를 시뮬레이션을 통하여 그 결과를 상호 비교하기로 한다. Fig. 9는 레이저 센서에 의해서 얻어진 원료더미의 3차원 형상을 나타낸다. Fig. 10은 각 단계에 대한 궤적을 지면에 투영시킨 2차원 등고선을 보이고 있다. 계산에 사용된 인자의 값들은 다음과 같다.

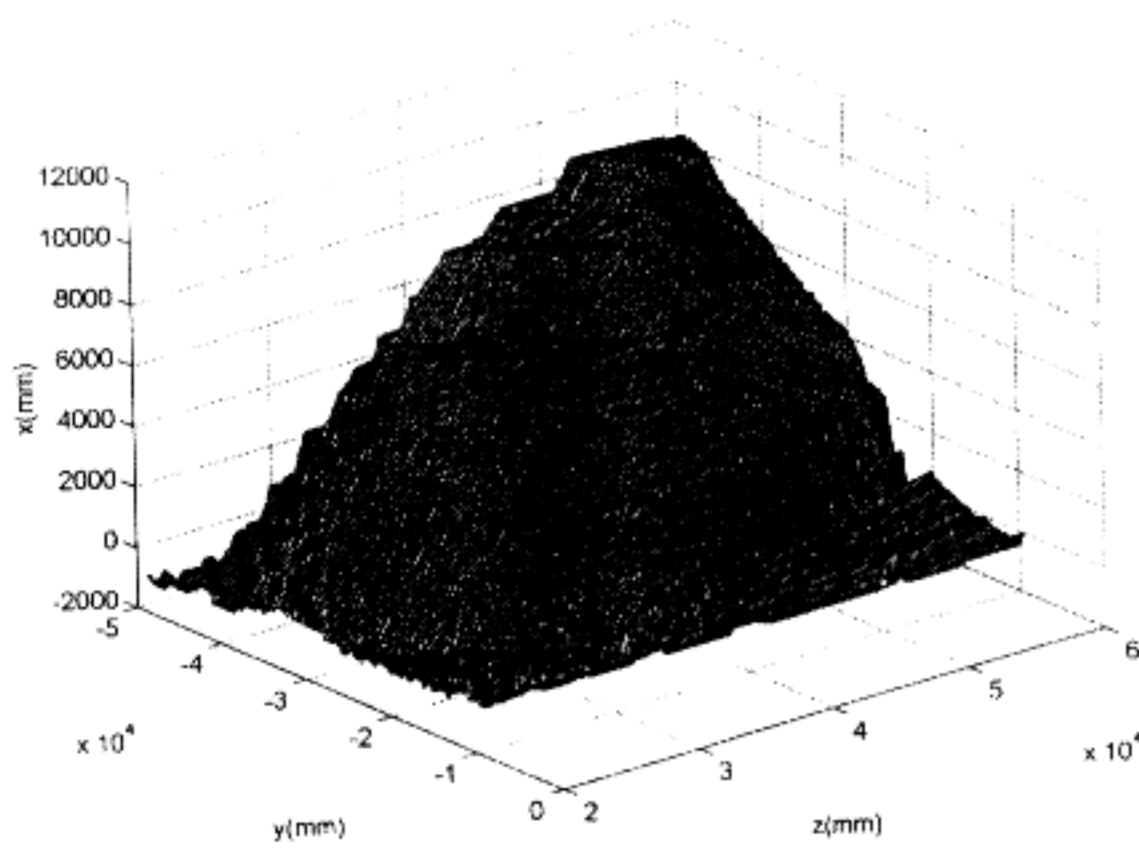


Fig. 9 3-Dimensional profile of a raw material heap

- $d_2 = 9,500 \text{ mm}$
- $a_3 = 46,100 \text{ mm}$
- $d_4 = 1,100 \text{ mm}$
- $d_6 = 1,226.8 \text{ mm}$
- $a_6 = 2,800 \text{ mm}$
- $\Phi = 2^\circ$
- $\Psi = -12^\circ$

방법 1을 따라서 구한 관절값들을 가지고 역으로 불출점에 대한 순기구학을 구하게 되면 정확히 같은 불출점을 얻게 되는데, 이는 방법 1이 해석적(analytic)인 해이기 때문이다. 그러나 방법 2를 따른 관절값을 가지고 불출점에 대한 순기구학해를 구하게 되면 수치해석에 따른 오차가 발생 할 수 있다. 최종 불출점에 대한 오차도 중요하지만 회전원통이 원료더미에 얼마만큼 깊숙히 침투하였는 가도 매우 중요하며, 또한 방법 1에서는 역기구학을 통해서 얻은 관절값들로부터 다시 순기구학을 구할 때 회전원통의 중심이 불출단의 높이와 정확히 일치하여야 하므로, 구한 역기구학해에 대한 검증은  $O_5$ 에 대한 순기구학으로 정하였다. Fig. 11은 방법 1과 방법 2에 의해서 구한

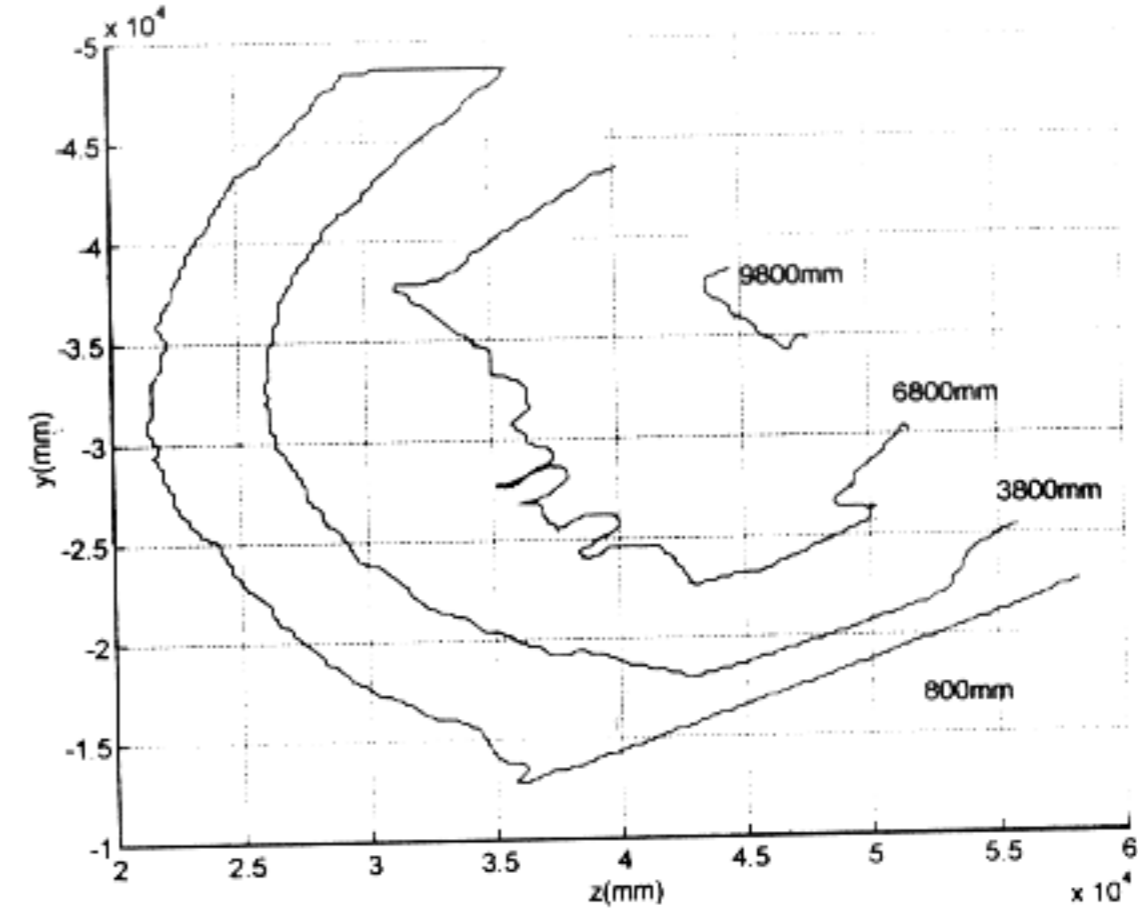


Fig. 10 2-Dimensional projected contours

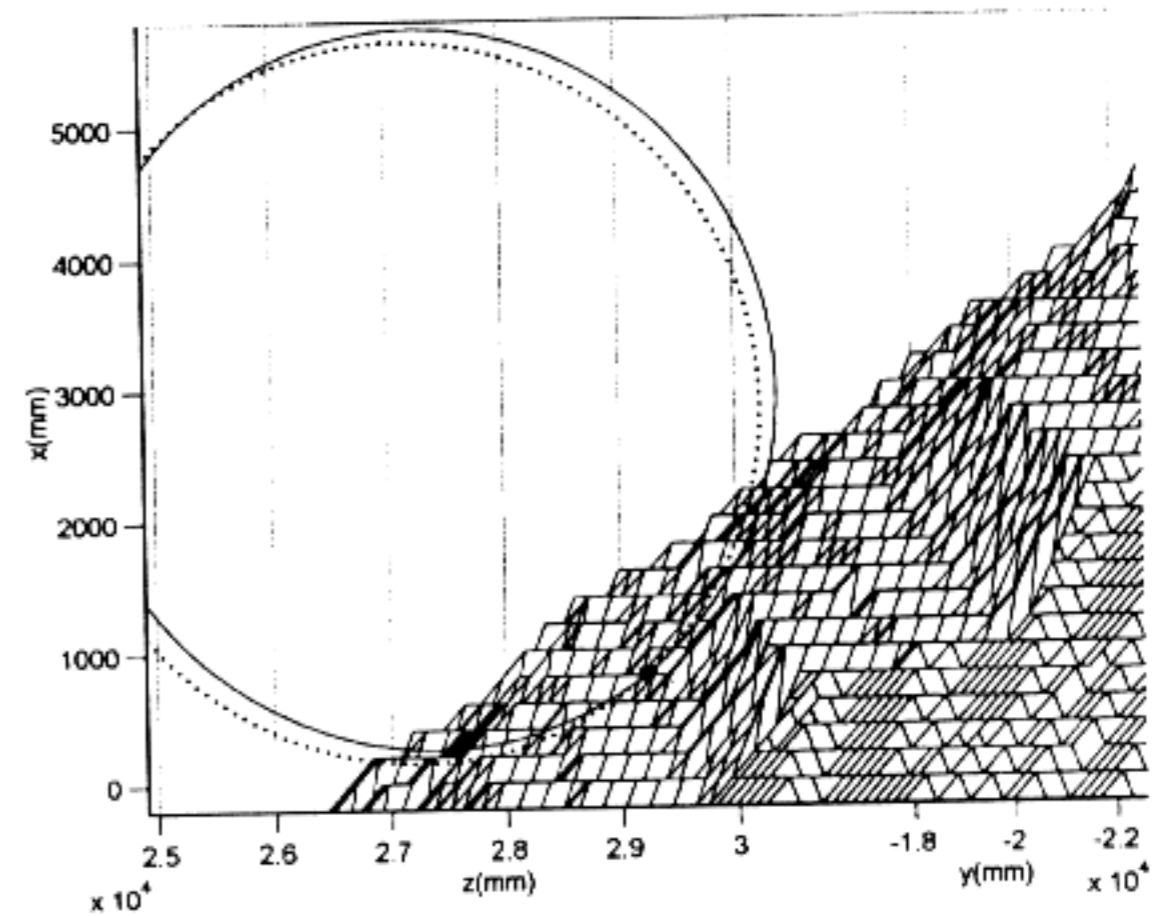


Fig. 11 View of the cylinders contacting a raw material heap  
(View direction  $(x, y, z) = (0, -1, -0.44)$ )

역기구학 해를 가지고 나타낸 회전원판과 3차원 원료더미를 보여주고 있다.

여기서  $\times$ 표시는 불출점의 위치를 나타내고,  $\circ$ 는 방법 1과 방법 2에 의한 순기구학해를 나타낸다. 실선은 방법 1에 의해서 회전원통을 나타냈고, 점선은 방법 2에 의해서 회전원통을 나타냈다.

Table 1 Given excavation point (800, -19545, 27898)mm

| 변수   | 역기구학 해           |                        |                        |                        | $O_5$ 점에 대한 순기구학 |          |         |
|------|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------|----------|---------|
|      | $d_i(\text{mm})$ | $\theta_x(\text{rad})$ | $\theta_y(\text{rad})$ | $\theta_z(\text{rad})$ | x(mm)            | y(mm)    | z(mm)   |
| 방법 1 | -15316.0         | 0.457                  | -0.171                 | 0.816                  | 2998.3           | -19088.0 | 26226.0 |
| 방법 2 | -15444.0         | 0.455                  | -0.173                 | 0.979                  | 2893.4           | -19004.0 | 26119.0 |

## 7. 결 론

본 논문에서는 제철소 원료야적장으로부터 철광석 등의 원료를 컨베이어를 통하여 이송시킬 때 원료더미로부터 원료를 파내어 컨베이어에 싣는 장비인 원료불출기(reclaimer)의 역기구학 문제를 연구하였다. 불출기는 직렬형 매니플레이터의 형태로서 주어진 불출점에 대한 순기구학 방정식의 수는 3개인데 반하여 도입된 관절변수의 수는 4개가 되는 기구학적 여유자유도를 가지고 있다. 본 논문에서는 2가지 방법의 역기구학 해가 시도되었다. 첫 번째는 원료불출 경로계획을 통하여 하나의 관절변수의 값을 미리 정하고 나머지 3개를 순기구학 방정식 3개로부터 구하는 방법이고, 두 번째는 불출기의 버킷과 원료면이 서로 접하여야 한다는 기하학적 조건식 하나를 더 사용하는 것이었다. 두 번째 방법에 대한 닫힌 형태의 해는 존재하지 않았으며 대신에 1차 근사해를 구하였다. 미리 붐의 선회고도를 정하고 역기구학 해를 구하는 첫 번째 방법은 원료송출을 완벽하게 할 수 있다는 측면에서 장점이 있으며 또한 구해진 해는 닫힌 형태이다.

## 8. 참고문헌

1. G. N. Sandor and A. G. Erdman, *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, Vol. 2, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1984.
2. K. S. Fu, R. C. Gonzalez and C. S. G. Lee, *Robotics*, New York, McGraw-Hill, 1987.
3. D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
4. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1992.