論文 한국정밀공학회지 제14권 제2호 (1997년 2월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 14. No. 2. FEBRUARY. 1997.

본 연구는 1995년도 교육부 학술연구조성비 (기계공학: ME95-D-05)에 의하여 연구되었음

무한차원 적응시스템의 수렴성 및 신호의 들뜸지속성

홍 금 식*

Convergence of Infinite Dimensional Adaptive Systems and Persistence of Excitation of Related Signals

Keum-Shik Hong*

ABSTRACT

The asymptotic convergence of a coupled dynamic system, which is motivated from infinite dimensional adaptive systems, is investigated. The convergence analysis is formulated in abstract Banach spaces and is shown to be applicable to a broad class of infinite dimensional systems including adaptive identification and adaptive control. Particularly it is shown that if a uniquely existing solution is p-th power integrable, then the solution converges to zero asymptotically. The persistence of excitation(PE) of a signal which arises in an infinite dimensional adaptive system is investigated. The PE property is not completely known yet for infinite dimensional adaptive systems, however it should be investigated in relation to spatial variable, boundary conditions as well as time variable.

Key Words : Adaptive System(적응시스템), Infinite Dimensional Systems(무한차원 시스템), Convergence(수렴성), Stability(안정성), Persistence of Excitation(들뜸 지속성), Semi-Group Theory(반군론).

1. 서 론

미지의 파라미터들을 포함하고 있는 플랜트에 대해서 플랜트의 출력이 기준모델로부터의 출력을 점근적으로 추종하도록, 제어기의 파라미터들을 회기적으로 자동조정하는 제어방식을 기준모델형 적응제어라고 한다. 이와 같은 제어방법은 기준모델로부터의 출력의 형태에 따라 조절 또는 추종이 모두 가능하다. 따라서 제어하고자 하는 플랜트에 대한 정보가 충분치 못한 경우에는 전통적인 제어전략을 구사하기 보다는 시스템규명을 통하여 먼저 제어대상물에 대한 충분한 지식을 얻은 다음 기존의 잘 확립된 제어기 설계법을 적용할수 있겠다 (간접형 적응제어). 아니면 기준모델을 두고 이것과의 입/출력 신호의 오차에 근거하여 이러한 오차가 줄어들도록 제어기 파라미터들을 조작함으로서 플랜트의 입/출력이 기준모델로부터의 입/출력을 추종케하는 적응제어 메카니즘안에 시스템 규명과정을 포함시킨 직접형 적응제어를 수행할수도 있겠다. 본 논문은 간접형 적응제어의 경우에는 시스

* 부산대학교 공과대학 제어기계공학과, 기계기술연구소

템 규명과정에서 그리고 직접형 적응제어의 경우에는 제어기의 설계과정에서 유도되는 오차방정식의 해의 수렴성 및 관련되는 신호의 성질에 관한 연구이다.

적응제어기의 설계문제는 첫째, 요구되는 제어목적이 성취되도록 제어기의 파라미터들을 계속적으로 조절하는 적응제어법칙의 유도와 둘째, 플랜트, 제어메카니즘, 제어법칙등을 포함한 전체 폐회로의 평등점근안정성(uniform asymptotic stability)을 확립하는 문제를 포함한다.

선형 집중계수(lumped parameter) 연속시스템 및 이산시스템의 적응제어에 관한 연구는 최근에 접어들어 활발히 연구되었고 또 적용사례도 많이 발표되고 있다. 또한 이러한 방법의 비선형시스템 및 시변시스템에 대한 확장도 활발히 진행되고 있는 실정이다.[1][2][12] 그러나 무한차원시스템(infinite dimensional system)에 관한 연구는 아직까지 그리 많지 않은 실정이다. 무한차원시스템에 관한 주요 결과들을 간단히 소개하면, Bank 와 Kunish[3]는 전통적인 최소자승법을 이용하여 포물형 및 타원형 편미분방정식(편미방)에 나타나는 시스템파라미터들의 추정(estimation)에 관한 연구를 수행하였고, Demetriou 와 Rosen[4]은 2차원 포물형 및 쌍곡선형 편미방의 적응규명(adaptive identification)에 관한 연구를 수행하였다. Hong 과 Bentsman[4][5]은 포물형 편미방의 직접형 적응제어를 수행하였고 그 과정에서 나타나는 파라미터 오차방정식의 수렴성을 평균화법(averaging method)을 통하여 증명하였다.

자연계에서 일어나는 많은 현상들이 무한차원시스템(편미방, 시간지연시스템, 적분 -미분 방정식 등)으로 모델링되고, 또 공학현장에서도 많은 문제들이 편미방으로 모델링되고 있음을 고려할때, 무한차원시스템에 대한 보다 적극적인 제어연구가 필요하다 하겠다. 제어하고자하는 대상을 집중계수시스템으로 모델링할 것인가 분포계수시스템 (distributed parameter system)으로 모델링할 것인가에 대한 대답은 간단하지 않으며, 모델링 오차로 인한 제어정도, 활용가능한 제어방법등 여러 요소가 사전에 충분히 고려되어야 한다. 그러나 관련공학 (컴퓨터 연산속도의 발달, 분포 센서 및 구동기의 등장, 복합재료의 등장 등)의 발달과 더불어 최근 분포계수시스템의 제어방법에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있으며, 분포계수시스템의 제어의 난이도를 생각할때 별도의 시스템규명이 필요치 않는 기준모델형 적응제어 기법의 개발은 그 적용 가능성이 높다 하겠다.

본 논문은 분포계수시스템의 적응제어 혹은 적응규명에서 나타나는 연성된(coupled) 시변시스템(time-varying system)의 해의 수렴성 및 관련신호의 들뜸지속성(persistence of excitation)에 관한 연구이다. 본 논문의 첫번째 기여는 제3절의 정리1에서와 같이 적응시스템의 오차방정식이 리아프노프 재설계법을 이용하여 유도되게 될때, 즉 임의의 동적시스템에 대하여 리아프노프 함수가 존재하고 그 함수의 시간에 대한 미분이 어떤 조건을 만족하게 될때, 그 방법론 자체가 이미 해의 수렴성을 보장하게 된다는 점을 밝힌 점이다. 이와같은 사실은 설계방법론적인 문제이기 때문에 포물형 편미방에 국한되지 않고 일반적인 적응시스템에 적용가능한 것이며 또한 Hong 과 Bentsman[5][6]의 결과를 포함하는 것이 된다. 두번째 기여는 포물형 시스템의 적응제어를 통한 들뜸지속성의 해석에 관한 시도이다. 집중계수시스템의 적응제어에 있어서는 관련된 신호들의 들뜸지속성이 알고리즘의 수렴성 더 나아가 지수안정성을 보장하는 충분조건으로 등장함이 이미 잘 알려져 있다. 그러나 분포계수시스템에 있어서 이러한 조건에 대한 연구도 드물뿐만 아니라 제시된 조건이 있다 하더라도 이러한 조건을 만족하는가에 대한 조사도 불가능한 실정이다. 또한 이러한 조건이 알고리즘의 수렴성에 대해서 어떻게 작용되고 있는지도 잘 알려져 있지 않다. 본 논문에서는 포물형 적응시스템에 국한하여 들뜸지속성을 기준모델형 적응제어기의 파라미터의 수렴성에 관련하여 살펴보기로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서 먼저 무한차원시스템에서 등장하는 미지량들이 어떤것이 있는지를 살펴보기 위하여 예로서 포물형 편미방에서 나타나는 미지량들을 살펴본다. 제3절에서 적응제어 법칙의 수렴성에 관련하여 연성된 시변시스템을 추상적인 공간상에서 정의하고 그 해의 0 으로의 수렴성을 보인다. 제4절에서 제어기의 수렴성이 보장된다는 측면에서 들뜸지속성을 조사하기로 한다. 제5장에서 결론을 언급한다.

2. 분포계수시스템에서 나타나는 미지량

먼저 편미분방정식으로 표기되는 분포계수시스템에서 미지량(unknown system parameters)들이 어떠한 형태로 나타나는지를 살펴보자. 편미방은 그 형태에 따라 타원형(elliptic), 포물형(parabolic) 및 쌍곡선형(hyperbolic)등으로 구분되는데, 해의 존재성, 성질, 풀이방법등이 형태에 따라 크게 달라진다. 보다 세세한 내

용은 참고문헌 [7]-[9]을 참조키로 한다. 본 절에서는 포물형 편미방에 국한하여 살펴보기로 한다.

포물형 편미방으로 모델링되는 플랜트들은 자연계, 생태학계, 생물학계 및 공학 현장에서 많이 등장하고 있다. 예를 들면 열전달, 핵원자로의 동력학, 화학반응, 결정성장, 집단유전학, 반도체에서의 전자와 holes 의 이동, 신경축색돌기 방정식, 수리학, 석유회수 그리고 확산현상등을 들수 있다.

구체적으로 다음의 1-차원 포물형 편미방을 예로 들어 보자.

$$\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + q(x,t,u), t > 0$$

$$\alpha_0 u(0,t) + (1-\alpha_0)\frac{\partial u}{\partial n}(0,t) = g_0(t),\ 0 \le \alpha_0 \le 1$$

$$\alpha_1 u(1,t) + (1-\alpha_1)\frac{\partial u}{\partial n}(1,t) = g_1(t),\ 0 \le \alpha_1 \le 1$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

상기의 방정식을 열전달 및 수리학에서 각각 비교하여 보자. 먼저 열전달 현상에서 $u(x,t)$ 는 공간좌표 x 에서의 시간 t 일때의 막대의 온도를 나타내고, $\sigma(x)$ 는 막대를 구성하는 물질의 단위체적당의 비열, $\kappa(x)$ 는 열전도도를 나타낸다. $q(x,t,u)$ 는 열원(heat source)이나 싱크(sink)로서 온도 u 에 대한 함수일수도 있음을 나타내고 있다. 그러나 수리학에서는 $u(x,t)$ 는 토양과 지하수, 저류암등과 같은 다공성 물질을 통과하는 유체의 이동현상을 나타내는데 포화 토양에서는 피압지하수위 (piezometric head)를, 또 비포화토양에서는 수두(hydraulic head)를 나타낸다. $\sigma(x)$ 는 수용도(storativity) 또는 기공도(porosity) 및 수분수용능력 함수를 각각 나타내고, $\kappa(x)$ 는 전도계수(transmissivity) 혹은 수리전도도(hydraulic conductivity)을 나타낸다. 열전달에서는 이러한 계수들을 실험에 의하여 구할수 있는데 많은 경우 20-30%의 오차를 갖고 있다. 그러나 열전달에서와는 달리 수리학에서는 상기의 시스템 파라미터들을 실험에 의하여조차 정확한 값들을 알아내는 일은 거의 불가능하다.

또한 경계조건에서 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ 이면 Dirichlet 형 경계조건이 되고 $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ 이면 Neumann 형 경계조건이 되며, 이 두 경우가 아닌 경우에는 혼합된 경계조건 또는 Robin 형 경계조건이라 불리운다. 열전달에서는 Dirichlet 형 경계값은 막대기의 양끝단의 온도를 나타내고, Neumann 형 경계값은 그 값이 0 일때 양끝단에서 완전히 단열되어 있음을 나타내고 아닐 경우에는 대류열전달이 있음을 나타낸다. 여기서 정확한 α_0, α_1 을 구하는 것도 중요한 일이다. $u_0(x)$ 는 초기조건으로 주어진 문제에 따라 구하고자 하는 미지량으로서 취급될수도 있는데 이는 초기의 분포상태를 분석해내는 규명대상이 될 수도 있겠다.

따라서 제어대상물이 상미분방정식으로 표기되는 집중계수시스템에서와는 달리 포물형 편미방에서는 미지의 파라미터들이 시스템 방정식자체, sink/source 항, 경계조건 및 초기조건등에서 각각 나타날수 있음을 알수 있다. 이에 따른 적응제어 법칙이 각각 달라지고 있으며, 특히 경계조건이 달라질때 즉 Dirichlet 형 경계조건이나, Neumann 형 경계조건이나, Robin 형 경계조건이나 등에 따른 적응제어 법칙의 견실성 및 안정성의 변화에 대한 연구도 필요하다. 그리고 타원형 및 쌍곡선형 편미방에서도 미지의 파라미터들이 나타나는 양상은 포물형과 같이 시스템자체, sink/source, 경계조건등에서 나타날 수 있다.

3. 플랜트, 적응제어기 및 수렴성

본 절에서는 무한차원 적응시스템의 수렴성을 추상공간(abstract space)에서 조사한다. 먼저 이해를 돕기 위하여 무한차원 시스템중 포물형 편미방에 대해서 제어하고자 하는 플랜트, 기준모델, 제어기 및 적응법칙이 구체적으로 어떠한 형태로 나타나는가를 소개한다. 그리고 일반적인 추상공간에서 발전방정식(evolution equation)으로 나타나는 오차방정식의 수렴성이 어떻게 보장될수 있는지를 보인다.

공간적으로 변화하는 계수를 가진 다음과 같은 선형 n-차원 포물형 편미방으로 표기되는 분포계수 시스템을 고려한다.

$$u_t(x,t) = \nabla \bullet (a(x)\nabla u(x,t)) + b(x)u(x,t) + f(x,t),\ x \in \Omega,\ t > 0 \qquad (1)$$

여기서 아래첨자 t 는 시간에 대한 편미분을 나타내고, Ω 은 R^n상의 유계개영역(bounded open domain)이다. f(x,t) 는 제어입력 함수이고 그리고 ∇ 은 구배벡터를 나타낸다. $a(x), b(x)$ 는 미지의 시스템 계수들이다.

그러나 식 (1)이 포물형이기 위해서 $a(x) > 0$ 이어야 함을 알수 있고, 해의 존재성 및 유일성을 위하여 $a(x) \in C^1(\Omega)$, $b(x) \in C(\Omega)$ 을 가정한다. 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$u(x,t) = \beta(x,t),\ x \in \partial\Omega, t > 0. \tag{2}$$

여기서 $\partial\Omega$ 은 Ω 의 원활한 경계를 나타낸다. 경계값 $\beta(x,t)$ 는 이미 알려져 있다고 가정한다. 초기조건은 다음과 같다.

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega. \tag{3}$$

여기서 $u_0(x) \in C(\Omega)$ 을 가정한다. 일반적으로 계측시스템의 출력 y 는 다음과 같이 주어진다.

$$y(x_p,t) = Gu(x,t), x_p \in \Omega_p, \Omega_p \subseteq \overline{\Omega}, t \geq 0 \tag{4}$$

여기서 $G : C(\Omega x R^+) \to C(\Omega_p x R^+)$ 는 선형 유계 시불변연산자(linear bounded time-invariant operator)로서 센서의 특성에 관련되어 있다. Ω_p는 y 가 정의되어 있는 $\overline{\Omega}$ 의 부분집합을 나타낸다. 본 논문에서는 분포센싱 및 엑츄에이션이 가능하다 즉, 정의역 Ω 상의 모든 점에서 u(x,t) 의 계측이 가능하다고 가정한다.

식 (1)-(3) 에 대응하여 기준모델은 다음과 같이 정의될수 있다.

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= \nabla \bullet (c(x)\nabla v(x,t)) + d(x)v(x,t) + r(x,t), \\ &\qquad x \in \Omega,\ t > 0 \qquad (5) \\ v(x,t) &= \beta(x,t),\ x \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x,0) &= v_0(x) \end{aligned}$$

여기서 $c(x), d(x), v_0(x)$ 는 설계변수로서 설계자가 원하는 임의의 값들을 취할수 있으며 $c(x) \geq c_0 > 0$, $d(x) < 0, |d(x)| \geq d_0 > 0$ 을 만족하면 되겠다. 기준모델은 플랜트의 모델링을 참조하여 가능하면 간단한 형태가 좋으며, 기준입력 $r(x,t)$ 을 통하여 원하는 출력 $v(x,t)$ 를 얻을수 있으면 되겠다. 가정으로부터 기준모델의 경계값은 플랜트의 경계값과 동일하게 잡으면 되겠다.

이제 기준모델형 적응제어기의 설계는 다음과 같이 요약될수 있다.

(가) 플랜트출력 $u(x,t)$ 가 기준모델 출력 $v(x,t)$ 를 점근적으로 추종하고,

(나) 폐루프내의 모든 신호들이 평등유계되도록하는 유계제어신호 $f(x,t)$ 를 찾아내는 일이다.

적응제어기의 예[5]: 상기의 포물형 플랜트 (1)-(3) 과 기준모델 (5) 를 고찰할때, 아래의 적응제어 법칙을 적용하면 플랜트출력 $u(x,t)$ 와 기준모델출력 $v(x,t)$ 사이의 오차 $\xi(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ 는 시간 t 가 ∞ 로 접근할때 0 으로 수렴하고 폐루프내의 모든 신호들은 평등유계된다.

제어법칙 :

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \nabla \bullet (\phi_a(x,t)\nabla u(x,t)) \\ &\quad + \phi_b(x,t)u(x,t) + r(x,t) \end{aligned} \tag{6}$$

적응법칙 :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_a(x,t) &= k\nabla(u(x,t) - v(x,t)) \cdot \nabla u(x,t), \\ \phi_a(x,0) &= \phi_{a0}(x) \qquad (7a) \\ \dot{\phi}_b(x,t) &= -k(u(x,t) - v(x,t))u(x,t), \\ \phi_b(x,0) &= \phi_{b0}(x) \qquad (7b) \end{aligned}$$

여기서 k 은 적응게인(adaptation gain)이다.

주석 1: 위의 적응제어기의 예는 포물형 편미방으로 표기되는 플랜트 식(1)-(3)에 대해서 제어기 식(6)-(7)을 사용할 경우 전체 폐회로가 수렴함을 밝히고 있다. 구체적인 증명은 Hong 과 Bentsman[5]을 참조하기로 한다. Hong 과 Bentsman[5]에서 사용한 증명기법은 리아프노프 함수와 Barbalat 의 예비정리를 이용한 것으로서 전통적인 유한차원 적응시스템의 안정성 및 수렴성의 증명방법을 그대로 따르고 있다. 증명과정에서 제어기의 파라미터 오차함수들은 다음과 같이 도입되었으며

$$\psi_a(x,t) = \phi_a(x,t) + a(x) - c(x) \tag{8a}$$
$$\psi_b(x,t) = \phi_b(x,t) + b(x) - d(x) \tag{8b}$$

나타나는 상태오차 $\xi(x,t)$ 에 대한 미분방정식은 다음과 같았다.

$$\begin{aligned} \xi_t(x,t) &= \nabla \bullet ((c(x) + \psi_a(x,t)\nabla\xi) + (d(x) + \psi_b(x,t))\xi \\ &\quad + \nabla \bullet (\psi_a(x,t)\nabla v) + \psi_b(x,t)v \end{aligned} \tag{9}$$

주목할 것은 상태오차의 미분방정식도 플랜트와 같은 포물형의 시변시스템이며 기준모델 출력 $v(x,t)$는 외부신호로 취급되고 있는 점이다. 또한 식(8a,b)로부터 파라미터 오차의 미분방정식도 식(7a,b) 와 같음을 알수있다. 사용된 리아프노프 함수는 다음과 같았다.

$$V(t)=\frac{1}{2}<\xi,\xi>+\frac{1}{2\varepsilon}(<\psi_a,\psi_a>+<\psi_b,\psi_b>). \quad (10)$$

이제 본 논문의 주결과를 전개하기로 한다. 앞의 포물형시스템과 마찬가지로 쌍곡선형시스템도 적응규명 및 적응제어 시스템의 구성시 어떤 기준모델을 세워놓고 그 기준모델에 근거하여 규명 또는 제어를 수행할 경우에 전체 폐회로의 다이나믹스는 오차방정식 즉 상태오차와 파라미터 오차방정식으로 표현될수 있다.[4] 따라서 이러한 오차시스템의 안정성, 수렴성 및 견실성을 해석함으로서 적응시스템 전체의 안정성, 수렴성 및 견실성을 해석하게 된다. 이제 무한차원 적응시스템에서 나타나는 오차방정식을 추상적인 발전방정식 (evolution equation)으로 표현하고 반군론(semi-group theory)을 이용하여 해의 수렴성을 보이기로 한다. 반군론이란 상미분방정식, 편미분방정식, 시간지연방정식, 미분-적분방정식 등등을 포함하는 포괄적인 시스템을 추상적인 벡터장에서 해의 존재성, 유일성 및 연속성을 연구하는 학문이다.[8][9] 다음의 정리 1에서 나타나는 발전방정식인 식 (11), 식 (12)의 구체적인 예로써 상기의 식 (9)과 식 (7)을 취할수 있겠다. 그러나 정리 1의 적용은 포물형편미방에만 국한되는 것이 아니고 추상적인 Banach 공간상에서 표현될수 있는 모든 동적시스템에 적용가능하다. 이 사실이 또한 본 논문의 핵심이기도 하다.

정리 1: 다음과 같은 연성된 동적시스템을 고려한다.

$$\dot{\xi}(t)=A(\eta(t))\xi(t)+f(t,\xi,\eta),\xi(0)=\xi_o \quad (11)$$

$$\dot{\eta}(t)=g(t,\xi,\eta),\eta(0)=\eta_o \quad (12)$$

여기서 , $\xi\in X$, $\eta\in Y$ 이며 X, Y 는 Banach 공간들이다. $A(\eta(t))$ 는 X 상에서 t 를 파라미터로 한 미분연산자(differential operator)이다. 다음을 가정한다.

(가) 방정식 (11)-(12)에 대한 유일한 해가 존재하고, 식 (11)에 대한 해의 형태가 다음과 같다.

$$\xi(t)=\Phi(t,0)\xi_o+\int_0^t\Phi(t,\tau)f(t,\xi(\tau),\eta(\tau))d\tau \quad (13)$$

여기서 , $\Phi(t,s)$, $0\le s\le t$ 는 $A(\eta(t))$ 에 관련된 진화연산자(evolution operator) 이며, $\|\Phi(t,s)\|\le M_1$, $0\le s\le t<\infty$, 의 관계가 성립한다. (나) 원점에서 $f(t,0,0)=0$ 이며 또한

$$\|f(t,\xi,\eta)\|\le\alpha_0(\eta)\|\xi\|+c_0, \forall t\ge 0 \quad (14)$$

을 만족한다. 여기서 c_0 는 상수이며 유한한 η 에 대하여 $\alpha_0:Y\to R^+$ 은 유한한 값을 가진다. (다) 식(11)-(12)에 대하여 리아프노프 함수후보 $V:RxXxY\to R^+$ 가 존재하며

$$k_1\left(\|\xi\|^2+\|\eta\|^2\right)\le V(t,\xi,\eta)\le k_2\left(\|\xi\|^2+\|\eta\|^2\right) \quad (15)$$

이다. 여기서 k_1,k_2는 양의 상수들이다. (라) 다음과 같은 단조증가함수 $\alpha(\cdot)$, $\alpha(0)=0$, 가 존재한다.

$$\dot{V}(t,\xi,\eta)\Big|_{(11)-(12)}\le-\alpha\left(\|\xi\|\right) \quad (16)$$

그러면 모든 $\xi_0\in X$ 에 대해서 시간 t 가 ∞로 접근할 때 $\xi(t)\to 0$ 이다.

증명: 증명은 다음과 같은 세가지의 사실을 이용한다. 첫째, 상기의 시스템 (11)-(12) 에 대해서 리아프노프 함수 V 가 존재한다. 둘째, 상수변화법으로 표기되는 유일한 해가 존재한다. 셋째, 리아프노프 함수의 시간에 대한 미분치가 식 (16)으로 표기된다.

식 (15)-(16)을 만족하는 리아프노프 함수의 존재는 집합 $E_\gamma=\left\{(\xi,\eta):V(t,\xi,\eta)<\gamma,\gamma\in R^+\right\}$ 이 positive invariant 임을 의미한다. 따라서 $\|\xi(t)\|$, $\|\eta(t)\|\le\gamma$, $\forall t\ge 0$, 이다. 이제 초기시간 s, 초기상태 $\xi(s)$ 에서 출발하는 식 (11)의 해를 다음과 같이 표시하자.

$$\xi(t)=\Phi(t,s)\xi(s)+\int_s^t\Phi(t,\tau)f(t,\xi(\tau),\eta(\tau))d\tau \quad (17)$$

또 그 해가 초기시간 및 초기상태에 대한 함수이므로 $\xi(t)=\xi(t,\xi(s),s)$ 과 같이 표시할수 있다. 이제 두개의

파라미터를 가진 매핑 $S(t,s)$를 다음과 같이 정의하자.

$$S(t,s)\xi(s) = \xi(t,\xi(s),s),\ 0 \le s \le t < \infty \tag{18}$$

그러면 3개의 파라미터 $\{t,\xi(s),s\}$에 대한 해의 유일성 및 연속의존성에 의하여 매핑 $S(t,s)$은 Banach 공간 X 상에서 다음과 같은 진화연산자가 된다.(9)
(a) $S(\cdot,s)\xi(s): R^+ \to X$ 은 연속이다.
(b) $S(t,\cdot)(\cdot): R^+ x X \to X$ 은 연속이다.
(c) $S(s,s)\xi(s) = \xi(s)$. (d) 모든 $\xi(s) \in X$ 및 $0 \le s \le r \le t < \infty$에서

$$S(t,s)\xi(s) = S(t,r)S(r,s)\xi(s) \tag{19}$$

의 관계를 만족한다 (semi-group property). 마지막으로 식 (16)을 시간에 대해 적분하면

$$\int_0^\infty \alpha\left(\|S(t,0)\xi_o\|\right)dt \le V(0) - V(\infty) < \infty \tag{20}$$

임을 알수 있다. 이제 정리의 결론은 다음과 같이 모순법에 의하여 증명된다. 시간 t 가 ∞로 갈때 $S(t,0)\xi_o$가 0 으로 수렴하지 않는다고 가정하자. 그러면 다음을 만족하는 $\varepsilon > 0$ 및 무한수열 $t_j \to \infty$가 존재하여야 한다.

$$\|S(t_j,0)\xi_o\| \ge \varepsilon \tag{21}$$

그러나 ε이 아무리 작다하여도 다음을 만족하는 상수 $M_2 > 0$및 $\varepsilon_o > 0$이 존재하게 된다.

$$M_2 \ge \sup_{\|\eta(t)\|<\gamma} \alpha_0(\eta(t))$$
$$\frac{\varepsilon}{e} - \frac{c_o}{M_2} \ge \varepsilon_o > 0 \tag{22}$$

주목할 것은 M_2은 함수 f의 증가특성에 관련된 상수이고, 또 식 (14)에서 $c_o = 0$이면 식 (19)이 항상 성립함을 알수 있다. 따라서 식 (17)의 양변에 노옴을 취함으로써 다음이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\|\xi(t)\| &\le \|\Phi(t,s)\|\ \|\xi(s)\| + \int_s^t \|\Phi(t,\tau)\|\ \|f(\tau,\xi(\tau),\eta(\tau))\|d\tau \\ &\le M_1\|\xi(s)\| + \int_s^t M_1(\alpha_0(\eta(\tau))\|\xi(\tau)\| + c_0)d\tau \\ &\le M_1\|\xi(s)\| + M_1M_2\int_s^t \left(\|\xi(\tau)\| + \frac{c_o}{M_2}\right)d\tau. \end{aligned} \tag{23}$$

위의 식에 Bellman-Gronwall 의 부등식을 적용하면

$$\|\xi(t)\| \le \left(M_1\|\xi(s)\| + \frac{c_o}{M_2}\right)e^{M_1M_2(t-s)},\ t \ge s \ge 0 \tag{24}$$

이 얻어진다. 여기서 일반성을 잃지 않는 상태에서 수열 t_j가

$$t_{j+1} - t_j > (M_1M_2)^{-1} \tag{25}$$

을 만족함을 가정할수 있다. 또한 간극 Δ_j을 $\Delta_j = [t_j - (M_1M_2)^{-1}, t_j]$와 같이 정의하면 $m(\Delta_j) > 0$이다. 여기서 m은 Lebesgue measure 이고 간극 Δ_j은 서로 중첩되지 않음을 알수 있다. 이제 $t \in \Delta_j$에 대해서

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le \|\xi(t_j)\| = \|S(t_j,0)\xi_o\| \\ &= \|S(t_j,t)S(t,0)\xi_o\| \\ &= \|S(t_j,t)\xi(t)\| \\ &\le \left(M_1\|\xi(t)\| + \frac{c_o}{M_2}\right)e^{M_1M_2(t_j-t)} \\ &\le \left(M_1\|\xi(t)\| + \frac{c_o}{M_2}\right)e \end{aligned} \tag{26}$$

이 성립한다. 윗식에서 첫번째 및 세번째 등식은 식 (18)로부터, 두번째 등식은 식 (19)를 적용하였다. 그리고 두번째 부등식은 식 (24)로부터 구해진다. 따라서 식 (22)로부터 모든 $t \in \Delta_j$에 대해서

$$\|\xi(t)\| \ge \frac{\varepsilon_o}{M_1} > 0 \tag{27}$$

이 성립한다. 따라서

$$\int_0^{\infty}\alpha(\|S(t,0)\xi_o\|)dt \geq \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Delta_j}\alpha(\|S(t,0)\xi_o\|)dt$$
$$\geq \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Delta_j}\alpha\left(\frac{\varepsilon_o}{M_1}\right)dt \qquad (28)$$
$$= \alpha\left(\frac{\varepsilon_o}{M_1}\right)\sum_{j=1}^{\infty}m(\Delta_j) = \infty$$

이 되어 조건 식 (20)에 모순됨을 알수 있다. 따라서 $t \to \infty$일때에 $\xi(t) \to 0$이여야 함을 알수 있다.

주석 2: 해의 존재성 및 유일성을 위한 조건은 주어진 Banach 공간에 따라 다르다. 상기의 식 (11)의 경우에 $B(t) = A(\eta(t))$와 같이 정의하고 $B(t)$가 쌍곡선형 편미방일 경우에 그 발전방정식의 존재성에 대해서는 참고문헌 [8, p.134]을 참조할수 있으며, 포물형 편미방에 대해서는 [8, p.149] 혹은 [11, p.108] 을 참조할수 있다. 더 나아가 그와 같은 조건이 만족되면 쌍곡선형의 경우엔 $\|\Phi(t,s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}$ 이 성립하고, 포물형의 경우엔 $\|\Phi(t,s)\| \leq M$이 성립함을 알수 있다. 보다 상세한 내용은 참고문헌 [8][9][11]을 참조할수 있겠다. 적응제어 혹은 적응규명 문제에 있어서 식 (11)에서 $\xi(t)$는 플랜트와 기준모델 사이의 오차를 나타내고 벡터 $\eta(t)$는 제어기의 파라미터 오차를 나타낸다.

4. 들뜸지속성

본 절의 목적은 제어기 파라미터의 수렴성에 관련하여 플랜트 출력신호의 성질에 관한 분석이다. 집중계수시스템의 기준모델형 적응제어에 있어서 플랜트의 시스템차수의 상한이 알려져 있을 경우에 플랜트의 출력이 모델로부터의 출력을 점근적으로 추종케하는 제어기의 설계가 가능하고, 또 폐회로의 모든 신호들이 평등유계(uniformly bounded) 된다는 것이 이미 알려져 있다. 또한 기준모델의 strictly positive realness 을 가정함으로 폐회로의 안정성도 보장될수 있다. 더나아가 플랜트차수가 정확히 알려지고 또 시스템의 pole-zero 약분이 없는 경우 원점의 지수안정성을 얻기위한 필요충분 조건은 입력신호의 들뜸지속성임이 알려져 있다. 이러한 입력신호의 들뜸지속성은 외란이나 모델링되지 않은 다이나믹스가 있다 하더라도 적응시스템의 안정성 및 수렴성을 보장해 준다는 측면에서 견실성을 확보케 한다. 반면 분포계수시스템의 들뜸지속성에 관한 연구는 많지 않은 실정이다. Demetriou 와 Rosen[10]은 집중계수시스템의 들뜸지속성을 모방하는 차원에서 분포계수시스템의 들뜸지속성을 도입하고 있다.

먼저 제어기에서 조정되는 파라미터의 공칭값을 파라미터값들이 이러한 공칭값으로 수렴할때 플랜트와 모델사이의 정확한 상호일치가 이루어지는 것으로 정의하자. 그리고 적응시스템의 들뜸지속성을 제어기내의 파라미터들이 그들의 공칭값으로 수렴하는가 하지않는가에 관련시킨다면, 그 특성은 독립변수인 시간 t 및 공간좌표 x, 그리고 경계조건도 포함하여 해석되어져야 함을 알 수 있다. 이것은 집중계수시스템의 경우 상수입력은 들뜸지속성이 결여되어 있는데 반하여 분포계수시스템에서는 상수입력도 파라미터오차를 0 으로 수렴시킨다는 측면에서 들뜸지속성이 있다고 할수있기 때문이다.

본 절에서는 플랜트 (1)-(3)에서 $x \in R^1$이고 $b(x) = 0$인 다음과 같은 1-차원 포물형 시스템을 고려한다.

$$u_t(x,t) = (a(x)u_x(x,t))_x + f(x,t), \; x \in (0,1), t > 0$$
$$u(0,t) = \beta_1(t), \; u(1,t) = \beta_2(t) \qquad (29)$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

여기서 아래첨자 x 는 x 에 대해서 편미분됨을 나타낸다. 이제 식(9) 및 식(7)의 결과를 따를때 유도되는 상태오차의 미분방정식과 파라미터오차의 미분방정식은 다음과 같이 된다.

$$\xi_t(x,t) = ((c(x) + \psi(x,t))\xi_x(x,t))_x + (\psi(x,t)v_x(x,t))_x,$$
$$\xi(0,t) = \xi(1,t) = 0, \; \xi(x,0) = \xi_0 \qquad (30)$$
$$\psi_t(x,t) = \kappa\xi_x(x,t)(\xi_x(x,t) + v_x(x,t)), \psi(x,0) = \psi_0 \qquad (31)$$

다음을 정의한다.

정의: 주어진 함수 $\zeta(x)$에 대하여 집합 $I_i = \{x \in \Omega : d^i\zeta(x)/dx^i = 0\}$ 을 구한다. 만약 함수 $\zeta(x)$가 $I_i \neq \emptyset$이고 $m(I_i) = 0$이면 $\zeta(x)$는 i-차 들뜸지속하다고 정의한다.

정리 2: 적응시스템 (30)-(31)을 고려한다. 만약 기준모델 출력 v(x,t) 가 일차 들뜸지속하면 제어기 파라미터

오차 $\psi(x,t)$ 는 0 으로 수렴한다.

증명: 제3절의 결과로부터 $\xi(x,t)=0$이 성취되었다고 가정한다. 따라서 식(30)은

$$(\psi(x,t)v_x(x,t))_x = 0, \quad \forall x \in (0,1) \tag{32}$$

이 된다. x 에 대한 미분항이 0 이 되므로

$$\psi(x,t)v_x(x,t) = h(t) \tag{33}$$

가 된다. 식(33)의 오른편을 $h(t)$로 표시한 것은 오른편이 오직 시간 t 만의 함수이고 공간좌표에 대해선 어떤값을 넣어도 성립한다는 것을 의미한다. 가정에서 v(x,t) 가 일차 들뜸지속하므로 $I_1 = \{x \in (0,1) : v_x(x,t) = 0\} \neq \varnothing$ 이고, I_1 에서 $h(t)=0$가 된다. 즉 어떤 공간좌표 값을 넣어도 만족하는 $h(t)$는 0 그 자체이다. 반면에 $m(I_1)=0$ 이므로 $(0,1)-I_1$ 에서 $v_x(x,t) \neq 0$ 이고 따라서 $(0,1)-I_1$ 에서는 $\psi(x,t)=0$ 이다. 집합 $\{x \in (0,1) : \psi(x,t) = 0\}$ 는 Ω 상에서 조밀(dense)함으로, 따라서 연속성에 의하여 $\psi(x,t)=0$ 이 된다.

5. 결 론

본 논문에서는 무한차원시스템에서 나타나는 미지량들을 고찰하고, 포물형시스템을 예로들어 플랜트, 기준모델, 적응제어기 및 적응법칙등을 살펴보았다. 적응규명 또는 적응제어시에 등장하는 오차방정식이 동기가 된 연성된 시변 무한차원 동적시스템을 일반적인 추상공간상에서 정의하고 그 해의 수렴성을 리아프노프 함수의 존재와 해의 유일성을 이용하여 증명하였다. 그리고 리아프노프 재설계법을 이용한 적응시스템의 설계는 문제 자체의 성질에 의하여 상태오차의 수렴성이 보장된다는 사실을 보였다. 포물형 적응시스템의 들뜸지속성을 파라미터오차의 수렴과 관련하여 정의하였다. 그러나 무한 차원시스템의 적응제어에 관한 연구는 아직도 시작단계이며 보다 많은 노력이 필요하다 하겠다.

참 고 문 헌

1. Sastry, S. S. and Bodson, M., Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
2. Tsakalis, K. S. and Ioannou, P. A., Linear Time-Varying Systems: Control and Adaptation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
3. Banks, H. T. and Kunisch, K., Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems, Birkhauser, Boston, 1989.
4. Demetriou, M. A. and Rosen, I. G., "Adaptive Identification of Second Order Distributed Parameter Systems," Center for Applied Mathatical Science, Report #93-2, Univ. Southern California, CA, 1993.
5. Hong, K. S. and Bentsman, J., "Direct Adaptive Control of Parabolic Systems: Algorithm Systhesis, and Convergence and Stability Analysis," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, No.10, pp.2018-2033, 1994.
6. Hong, K. S. and Bentsman, J., "Application of Averaging Method for Integro-Differential Equations to Model Reference Adaptive Control of Parabolic Systems," Automatica, Vol.30, No.9, pp.1415-1419, 1994.
7. Garabedian, P. R., Partial Differential Equations, Chelsea Publishing Company, New York, 1986.
8. Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.
9. Walker, J. A., Dynamical Systems and Evolution Equations, Plenum Press, New York, 1980.
10. Demetriou, M A. and Rosen, I. G., "On the Persistence of Excitation in the Adaptive Estimation of Distributed Parameter Systems," IEEE Trans. Automatic Control, Vol.39, No.5, pp.1117-1123, 1994.
11. Friedman, A. Partial Differential Equations, Holt, Reinhart, and Winston, New York, 1969.
12. Krstic, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotovic, P., Nonlinear and Adaptive Control Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.